

2006—(G)

数 学 問 題

10:00～11:40 (100分)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙(8ページ)、記述式解答用紙(あ)1枚、記述式解答用紙(い)1枚、記述式解答用紙(う)1枚、記述式解答用紙(え)1枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
なお、記述式解答用紙はセットになっています。監督者の指示に従って、解答用紙を破ったりしないよう注意して、ミシン目に沿って1枚ずつ切り離してください。
3. 試験中に試験用紙の印刷が不鮮明な箇所や汚れなどに気づいた場合は、監督者に申し出てください。
4. 監督者の指示に従って、4枚の記述式解答用紙の受験番号欄(それぞれ2カ所、合計8カ所)に受験番号を記入してください。
5. 解答はすべてHBの黒鉛筆またはHB・0.5mm以上の芯のシャープペンシルで記入してください。
6. 解答は、**解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ**、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
7. 解答中でない解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
8. 受験中は不審な行動をとってはいけません。不正行為があれば全科目を無効とします。
9. 試験時間の途中で退場することはできません。
ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、監督者に申し出てください。
10. 試験終了のベルが鳴ると同時に解答をやめてください。
11. 問題用紙は試験終了後、持って帰ってください。

各問題の解答は、解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること。

枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は、採点の対象にはならない。

〔1〕

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

- (1) 平行四辺形 ABCD において、辺 AD を 2:1 に内分する点を E、線分 BE を 1:3 に内分する点を F とする。さらに、 $\triangle ABC$ の重心を G とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \boxed{\text{(ア)}} \vec{b} + \boxed{\text{(イ)}} \vec{d} \\ \overrightarrow{FG} &= \boxed{\text{(ウ)}} \vec{b} + \boxed{\text{(エ)}} \vec{d}\end{aligned}$$

が成り立つ。また、直線 FG と辺 AB の交点を H とすると、 $\overrightarrow{AH} = \boxed{\text{(オ)}} \vec{b}$ である。

- (2) $1 < t < e$ を満たす実数 t について、 xy 平面上の 4 点 $(1, 0)$ 、 $(e, 0)$ 、 $(e, 1)$ 、 $(t, \log t)$ を頂点とする四角形の面積 S は、 (カ) である。 t が $1 < t < e$ の範囲で動くとき、 S の取り得る値の範囲は (キ) $< S \leq$ (ク) である。ただし、 $\log t$ は t の自然対数であり、 e は自然対数の底である。

[2]

xy 平面上の 4 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$ を頂点とする正方形があり, O におもちゃの電車が置いてある. 正方形の周と頂点をそれぞれ線路と駅に見立て, 電車を反時計回りに走らせて遊びたい.

次の試行を考える. 箱の中に $0, 1, 2$ と書かれたくじが 1 本ずつ入っている. くじを 1 回に 1 本引いて, 0 が当たったら電車は動かさない. 1 が当たったら 1 駅分, 2 が当たったら 2 駅分走らせる (途中の駅は停車せずに通過するものとみなす). なお, 引いたくじはそのたびに箱に戻す. 次の問いに答えよ.

- (1) この試行を 4 回繰り返すとき, 電車が全く動かない確率を求めよ.
- (2) この試行を 4 回繰り返すとき, 電車が正方形を 2 周して O に戻る確率を求めよ.
- (3) この試行を 4 回繰り返すとき, A, C に停車せずに 1 周して O に戻る確率を求めよ.
- (4) この試行を 4 回繰り返すとき, 4 回の試行後に電車が O にある確率を求めよ.
- (5) この試行を最大 4 回まで繰り返す. ただし, 電車が 1 周して O に戻ったらそこで試行を終了するものとする. くじを引く回数の期待値を求めよ.

〔3〕 $f(x) = e^x \sin x$, $g(x) = e^x \cos x$ (e は自然対数の底) とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\int f(x)dx$ と $\int g(x)dx$ を求めよ.

(2) 部分積分法を利用して不定積分 $\int xf(x)dx$ を求めよ.

(3) 曲線 $y = xf(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めよ.

(4) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$) と x 軸および直線 $x = \frac{3\pi}{4}$ で囲まれる部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ.

[4]

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... は k が k 個 ($k=1, 2, 3, \dots$) ずつ続く数列である. この数列の第 n 項を a_n と表す. 次の問いに答えよ.

(1) $a_n = k$ となるような n の範囲を k を用いて表し, a_{100} の値を求めよ.

(2) $\sum_{n=1}^{100} a_n$ の値を求めよ.

(3) 初項から第 100 項 a_{100} までの間に, 偶数が何個現れるか答えよ. ただし, 同じ数が繰り返して現れる場合は重複して数える. 例えば, 初項から第 8 項までの間には偶数が 4 個現れる.

(4) 上の (1) で求めた不等式を用いて, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ.

——— このページは白紙です。 ———

——— このページは白紙です。 ———

—— このページは白紙です。 ——