〔1〕

(1) (ア) n^m

(イ) $\dfrac{m(m-1)(n-1)^{m-2}}{2}$

(ウ) $\dfrac{2}{e^2}$

(2) (エ) $x(x+2)e^x$

(オ) -2

(カ) $\dfrac{4}{e^2}$

(キ) 0

(ク) $-2+\sqrt{2}$

〔解説〕

(1)

$a(m, n)$ は，m 個のボールをそれぞれ n 個の箱のうちいずれかに入れる入れ方の総数であるから，

$$a(m, n)=n^m$$

である。

$b(m, n)$ は，m 個のボールの中から番号 1 の箱に入るボールを 2 つ選び，残りの $m-2$ 個のボールを番号 1 以外の $n-1$ 個の箱のうちいずれかに入れる入れ方の総数であるから，

$$\begin{aligned} b(m, n) &= {}_m\mathrm{C}_2(n-1)^{m-2} \\ &= \frac{m(m-1)(n-1)^{m-2}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{b(2n, n)}{a(2n, n)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n-1)(n-1)^{2n-2}}{2n^{2n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n-1)}{2n^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n}}{2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-2(n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-2(n-1)} \\ &= \frac{2}{e^2} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$f(x)=x^2e^x$$

より，積の微分公式から，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^x+x^2e^x \\ &= x(x+2)e^x \end{aligned}$$

であるので，$f(x)$ の増減表は次表のようになる。

x		-2		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって $f(x)$ は $x=-2$ のとき極大値

$$f(-2)=\frac{4}{e^2}$$

をとる。ここで，

$$2<e$$

より，

$$0<\frac{4}{e^2}<1$$

であるから，極大値より小さい整数のうちで最大のものは 0 である。

また，

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x+2)e^x+x(x+2)e^x \\ &= (x^2+4x+2)e^x \\ &= \left\{x-\left(-2-\sqrt{2}\right)\right\}\left\{x-\left(-2+\sqrt{2}\right)\right\}e^x \end{aligned}$$

より，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標は $-2-\sqrt{2}$ と $-2+\sqrt{2}$ で，このうち最も大きいものは $-2+\sqrt{2}$ である。

〔2〕

(1)

等比数列の和の公式より，

$$\sum_{k=1}^{n} x^{2k} = \frac{x^2 - x^{2n+2}}{1-x^2}$$

であるから，

$$f_n(x) = \frac{1}{1-x^2} - 1 - \frac{x^2 - x^{2n+2}}{1-x^2}$$
$$= \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}$$

となる。ここで，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ において

$$0 \leqq x^{2n+2} \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

であり，また，

$$\frac{1}{1-0^2} \leqq \frac{1}{1-x^2} \leqq \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\therefore 1 \leqq \frac{1}{1-x^2} \leqq \frac{4}{3} \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

であるから，①，②より，

$$x^{2n+2} \leqq \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} \leqq \frac{4}{3}x^{2n+2}$$

$$\therefore 0 \leqq f_n(x) \leqq \frac{4}{3}x^{2n+2}$$

となる。

(証明終)

(答) $f_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}$

(2)

$$-1 < x < 1$$

より，

$$\begin{cases} 0 < 1-x \\ 0 < 1+x \end{cases}$$

であることに注意して，部分分数分解を用いて，

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left\{-\log(1-x) + \log(1+x)\right\} + C$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + C$$

を得る。ここで C は積分定数である。

(答) $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + C$ (C:積分定数)

(3)

(1)より，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}x^{2n+2}dx \qquad \cdot\cdot\cdot ③$$

が成り立ち，また，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx = 0 \qquad \cdot\cdot\cdot ④$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}x^{2n+2}dx = \left[\frac{4}{3(2n+3)}x^{2n+3}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3(2n+3)2^{2n+1}} \qquad \cdot\cdot\cdot ⑤$$

であるから，③，④，⑤より，

$$0 \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx \leqq \frac{1}{3(2n+3)2^{2n+1}}$$

を得る。

(証明終)

(4)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}$$

とおくと，

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad \cdot\cdot\cdot ⑥$$

であり，また，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} x^{2k}dx = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2k}dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}$$
$$= S_n - \frac{1}{2\cdot 0+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 0+1}$$
$$= S_n - \frac{1}{2}$$

となり，(2)の結果から，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx - \int_0^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} x^{2k}dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \left(S_n - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \log\sqrt{3} - S_n$$

を得る。よって(3)の結果より，

$$0 \leqq \log\sqrt{3} - S_n \leqq \frac{1}{3(2n+3)2^{2n+1}}$$

$$\therefore \log\sqrt{3} - \frac{1}{3(2n+3)2^{2n+1}} \leqq S_n \leqq \log\sqrt{3} \qquad \cdot\cdot\cdot ⑦$$

となる。ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log\sqrt{3} - \frac{1}{3(2n+3)2^{2n+1}}\right) = \log\sqrt{3}$$

であるから，⑥，⑦とはさみうちの原理より，

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$
$$= \log\sqrt{3}$$

となる。

(答) $\log\sqrt{3}$

〔３〕

(1)

倍角公式と半角公式より，

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\ &= (\sin\theta+\cos\theta)^2-(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\ &= t^2-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right) &= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1+\cos\theta}{2} \\ &= \frac{t+1}{2}\end{aligned}$$

を得る。

(答)　$\sin 2\theta = t^2-1$

$\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)=\frac{t+1}{2}$

(2)

(1)の結果を代入して，

$$\begin{aligned}f(\theta) &= t^2-1-4a\cdot\frac{t+1}{2} \\ &= t^2-2at-2a-1\end{aligned}$$

を得る。また，三角関数の合成公式より，

$$\begin{aligned}t &= \sin\theta+\cos\theta \\ &= \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

であり，また，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき $\frac{\pi}{4} \leqq \theta+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$ であるから，

$$-1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$

となり，t のとりうる値の範囲は

$$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

である。

(答) $f(\theta)=t^2-2at-2a-1$

t のとりうる値の範囲　$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$

(3)

(2)の結果を平方完成すると，

$$\begin{aligned}f(\theta) &= t^2-2at-2a-1 \\ &= (t-a)^2-a^2-2a-1\end{aligned}$$

となるので，$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ のもとでの $f(\theta)$ の最大値 M は，

[1]　$a<\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ のとき

このとき $f(\theta)$ は $t=\sqrt{2}$ のとき最大値をとるから，

$$\begin{aligned}M &= \left(\sqrt{2}-a\right)^2-a^2-2a-1 \\ &= 1-\left(2+2\sqrt{2}\right)a\end{aligned}$$

となる。

[2]　$\frac{-1+\sqrt{2}}{2} \leqq a$ のとき

このとき $f(\theta)$ は $t=-1$ のとき最大値をとるから，

$$\begin{aligned}M &= (-1-a)^2-a^2-2a-1 \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2]より，

$$M=\begin{cases} 1-\left(2+2\sqrt{2}\right)a & \left(a<\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2} \leqq a\text{ のとき}\right)\end{cases}$$

となる。

また，$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ のもとでの $f(\theta)$ の最小値 m は，

[1]　$a<-1$ のとき

このとき $f(\theta)$ は $t=-1$ のとき最小値をとるから，

$$\begin{aligned}m &= (-1-a)^2-a^2-2a-1 \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

[2]　$-1 \leqq a<\sqrt{2}$ のとき

このとき $f(\theta)$ は $t=a$ のとき最小値をとるから，

$$\begin{aligned}m &= (a-a)^2-a^2-2a-1 \\ &= -a^2-2a-1\end{aligned}$$

となる。

[3]　$\sqrt{2} \leqq a$ のとき

このとき $f(\theta)$ は $t=\sqrt{2}$ のとき最小値をとるから，

$$\begin{aligned}m &= \left(\sqrt{2}-a\right)^2-a^2-2a-1 \\ &= 1-\left(2+2\sqrt{2}\right)a\end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2], [3]より，

$$m=\begin{cases} 0 & (a<-1\text{ のとき}) \\ -a^2-2a-1 & (-1 \leqq a<\sqrt{2}\text{ のとき}) \\ 1-\left(2+2\sqrt{2}\right)a & (\sqrt{2} \leqq a\text{ のとき})\end{cases}$$

となる。

$$(\text{答})\,M=\begin{cases} 1-\left(2+2\sqrt{2}\right)a & \left(a<\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2} \leqq a\text{ のとき}\right)\end{cases}$$

$$m=\begin{cases} 0 & (a<-1\text{ のとき}) \\ -a^2-2a-1 & (-1 \leqq a<\sqrt{2}\text{ のとき}) \\ 1-\left(2+2\sqrt{2}\right)a & (\sqrt{2} \leqq a\text{ のとき})\end{cases}$$

(4)

(3)の結果から $M-m$ の値を計算すると，

$$\begin{cases} 1-\left(2+2\sqrt{2}\right)a & (a<-1\text{ のとき}) \\ a^2-2\sqrt{2}a+2 & \left(-1 \leqq a<\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\text{ のとき}\right) \\ a^2+2a+1 & \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2} \leqq a<\sqrt{2}\text{ のとき}\right) \\ \left(2+2\sqrt{2}\right)a-1 & (\sqrt{2} \leqq a\text{ のとき})\end{cases}$$

となる。

[1]　$a<-1$ のとき

$$M-m=1-\left(2+2\sqrt{2}\right)a$$

より，この区間で $M-m$ の値は単調減少する。

[2]　$-1 \leqq a<\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}M-m &= a^2-2\sqrt{2}a+2 \\ &= \left(a-\sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

より，この区間で $M-m$ の値は単調減少する。

[3]　$\frac{-1+\sqrt{2}}{2} \leqq a<\sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned}M-m &= a^2+2a+1 \\ &= (a+1)^2\end{aligned}$$

より，この区間で $M-m$ の値は単調増加する。

[4]　$\sqrt{2} \leqq a$ のとき

$$M-m=\left(2+2\sqrt{2}\right)a-1$$

より，この区間で $M-m$ の値は単調増加する。

以上, [1], [2], [3], [4]より，$M-m$ の値は

$$a=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

のとき，最小値

$$\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}+1\right)^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$$

をとる。

(答)　最小値　$\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$

最小値をとるときの a の値　$\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$