[1]

(1),(2)

ア	$(1, -5, 5)$
イ	$\sqrt{51}$
ウ	4
エ	$\frac{11}{5}$
オ	2
カ	$-\frac{13}{17}$
キ	-3
ク	3
ケ	$\frac{a}{a+3}$
コ	$\frac{3a}{a+3}$

[2]

(1)

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1}+4(n+1)^2-4(n+1)-2 \\ &= 3a_{n+1}+4n^2+4n-2\cdots① \end{aligned}$$

$a_{n+1}=3a_n+4n^2-4n-2\cdots②$

①,②辺々引き算して,

$a_{n+2}-a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n+8n$

$\Leftrightarrow b_{n+1}=3b_n+8n$

$$\begin{aligned} \text{また,}b_1 &= a_2-a_1 \\ &= 3a_1+4-4-2-a_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$b_2=3b_1+8=8$

よって,(答)　$b_1=0, b_2=8, b_{n+1}=3b_n+8n$

(2)

(1)より,$b_{n+2}=3b_{n+1}+8n+8\cdots③$

$b_{n+1}=3b_n+8n\cdots④$

③,④辺々引き算して,

$b_{n+2}-b_{n+1}=3(b_{n+1}-b_n)+8$

$\Leftrightarrow c_{n+1}=3c_n+8$

また,$c_1=b_2-b_1=8$

よって,(答)　$c_1=8, c_{n+1}=3c_n+8$

(3)

(2)より,

$c_{n+1}+4=3(c_n+4)$

$$\begin{aligned} c_n+4 &= (c_1+4)\cdot 3^{n-1} \\ &= 12\cdot 3^{n-1} \\ c_n &= 12\cdot 3^{n-1}-4 \end{aligned}$$

よって,$n\geqq 2$のとき,

$$\begin{aligned} b_n &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k \\ &= 0+\sum_{k=1}^{n-1}(12\cdot 3^{k-1}-4) \\ &= \frac{12(3^{n-1}-1)}{3-1}-4(n-1) \\ &= 6\cdot 3^{n-1}-4n-2 \end{aligned}$$

これは,$n=1$でも成立する.

以上より,$b_n=6\cdot 3^{n-1}-4n-2$

よって,$n\geqq 2$のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \\ &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}(6\cdot 3^{k-1}-4k-2) \\ &= 1+\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}-4\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-2(n-1) \\ &= 1+3^n-3-2n^2+2n-2n+2 \\ &= 3^n-2n^2 \end{aligned}$$

これは,$n=1$でも成立する.

以上より,(答)　$a_n=3^n-2n^2$

つづいて$a_{n+1}-a_n\geqq 0$であることを数学的帰納法で証明する.

(i)$n=1$のとき

$a_2-a_1=1-1=0\geqq 0$よって成立.

(ii)$n=k$のとき,$a_{k+1}-a_k=2\cdot 3^k-4k-2\geqq 0$が成立することを仮定して,$n=k+1$のとき,$a_{k+2}-a_{k+1}\geqq 0$であることを示す.

$$\begin{aligned} a_{k+2}-a_{k+1} &= 3^{k+2}-2(k+2)^2-3^{k+1}+2(k+1)^2 \\ &= 2\cdot 3^{k+1}-2(6k+3) \\ &= 6\cdot 3^k-6(2k+1) \\ &\geqq 3(4k+2)-6(2k+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって,$a_{k+2}-a_{k+1}\geqq 0$

(i),(ii)よりすべての自然数nに対して,$a_{n+1}\geqq a_n$であることが示された.

(4)

仮定より,自然数kを用いて,$a_n=3^n-2n^2=3k$とできる.

$3^n-2n^2=3k$

$\Leftrightarrow 3(3^{n-1}-k)=2n^2$

ここで,2と3は互いに素なので,自然数lを用いて,

$n^2=3l$とできる.

よって,nは3を因数としてもち,自然数mを用いて,$n=3m$とできる.

$n=3m$をa_nに代入すると,

$$\begin{aligned} 3^{3m}-2(3m)^2 &= 27^m-18m^2 \\ &= 9(3\cdot 27^{m-1}-2m^2) \end{aligned}$$

より,$3^{3m}-2(3m)^2$は9の倍数であることがわかる.

よってa_nが3の倍数ならばa_nはまた,9の倍数であることが示された.

[3]

(1)

この条件を満たす組み合わせ, 及びそうなる確率は以下の表のとおり.

AB	BC	CA	
○	×	×	$p(1-p)^2$
○	○	○	p^3
×	○	○	$p^2(1-p)$
○	×	○	$p^2(1-p)$
○	○	×	$p^2(1-p)$

よって, 求める確率は,

$$p^3+3p^2(1-p)+p(1-p)^2=\underline{p\left(-p^2+p+1\right)\quad(\text{答})}$$

(2)

この条件を満たす組み合わせ, 及びそうなる確率は以下の表のとおり.

AB	BC	CA	
○	×	×	$p(1-p)^2$
○	○	○	p^3
×	○	○	$p^2(1-p)$
○	×	○	$p^2(1-p)$
○	○	×	$p^2(1-p)$
×	×	○	$p(1-p)^2$

よって, 求める確率は,

$$p^3+3p^2(1-p)+2p(1-p)^2=\underline{p(-p+2)\quad(\text{答})}$$

(3)

この条件を満たす組み合わせ, 及びそうなる確率は以下の表のとおり.

AB	BC	CA	
○	○	×	$p^2(1-p)$
○	○	○	p^3
○	×	○	$p^2(1-p)$
×	○	○	$p^2(1-p)$

よって, 求める確率は,

$$p^3+3p^2(1-p)=\underline{p^2(-2p+3)\quad(\text{答})}$$

(4)

(1),(2),(3) より行くことができる点の数とそうなる確率は以下の表のようになる.

点の数	0	1	2
確率	$(p-1)^2$	$2p^3-4p^2+2p$	$-2p^3+3p^2$

よって期待値は,

$$\begin{aligned}(p-1)^2\cdot 0+\left(2p^3-4p^2+2p\right)\cdot 1+\left(-2p^3+3p^2\right)\cdot 2 &= 2p^3-4p^2+2p-4p^3+6p^2\\ &= \underline{2p\left(-p^2+p+1\right)\quad(\text{答})}\end{aligned}$$

[4]

(1)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \underline{\frac{1-\log x}{x^2}} \quad (答)$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x(1-\log x)}{x^4} = \underline{-\frac{3-\log x^2}{x^3}} \quad (答)$$

(2)

$f''(x) = 0$ より

$3 - \log x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log e^3$

$x > 0$ であるから, $x = e^{\frac{3}{2}}$

よって, $\underline{(答)\quad A\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)}$

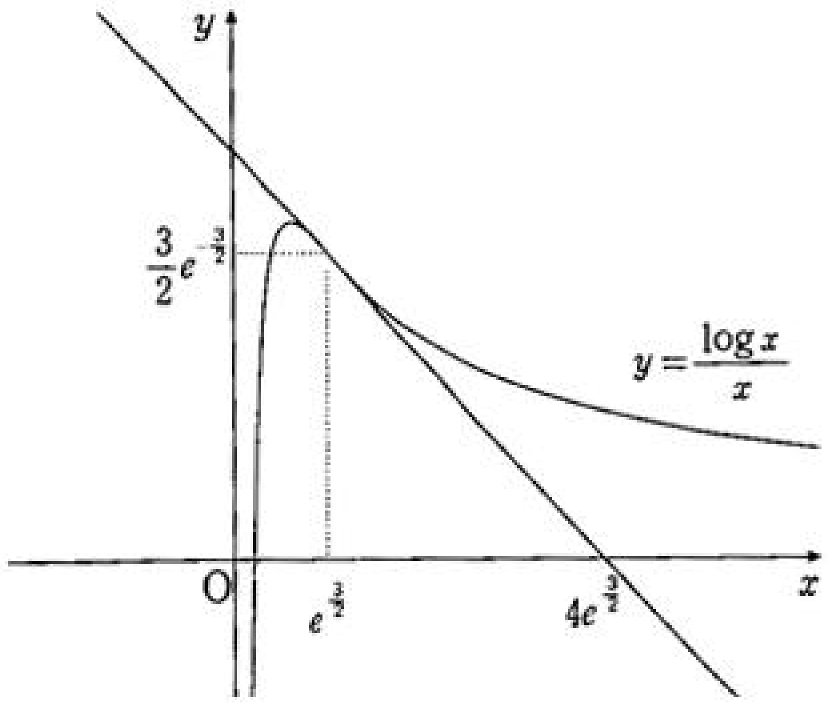
また A での接線 l は,

$$y = \left(1-\frac{3}{2}\right)e^{-3}\left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} = \underline{-\frac{1}{2}e^{-3}x + 2e^{-\frac{3}{2}}} \quad (答)$$

(3)

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \underline{\frac{1}{2}(\log x)^2} \quad (答)$$

またグラフは以下のようになる.



よって求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{\log x}{x}dx + \int_{e^{\frac{3}{2}}}^{4e^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{2}e^{-3}x + 2e^{-\frac{3}{2}}\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^{e^{\frac{3}{2}}} + \left[-\frac{1}{4}e^{-3}x^2 + 2e^{-\frac{3}{2}}x\right]_{e^{\frac{3}{2}}}^{4e^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{9}{8} + 2 + \frac{1}{4} \\ &= \underline{\frac{27}{8}} \quad (答) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \int \frac{(\log x)^2}{x^2}dx &= \int t^2 e^{-t}dt \quad (t = \log x \text{ と置換}) \\ &= -t^2e^{-t} + 2\int e^{-t}\cdot t\,dt \\ &= -e^{-t}(t^2+2t+2) \\ &= \underline{-\frac{1}{x}\left\{(\log x)^2 + 2\log x + 2\right\}} \quad (答) \end{aligned}$$

求める体積 V は,

$$\pi\int_1^{e^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx + \pi\int_{e^{\frac{3}{2}}}^{4e^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{2}e^{-3}x + 2e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 dx$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{x}\left\{(\log x)^2 + 2\log x + 2\right\}\right]_1^{e^{\frac{3}{2}}} + \pi\left[\frac{1}{12}e^{-6}x^3 - e^{-\frac{9}{2}}x^2 + 4e^{-3}x\right]_{e^{\frac{3}{2}}}^{4e^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \underline{\pi\left(2 - 5e^{-\frac{3}{2}}\right)} \quad (答)$$