

〔1〕

(1)				(2)			
ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
$\frac{4}{a}$	$b + \frac{16}{a}$	$\frac{4}{3}$	15	$1 - 4k$	$-m(2m + 1)$	$m(2m - 1)$	$(-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

(1) $y = 6 - ax$ なので,

$$\begin{aligned} xy + 2x + b &= -ax^2 + 8x + b \\ &= -a\left(x - \frac{4}{a}\right) + b + \frac{16}{a} \end{aligned}$$

より, $x = \frac{4}{a}$ で最大値 $b + \frac{16}{a}$ をとる.また, $\frac{4}{3} < a$ ($\because \frac{4}{a} < 3$) のとき, $ax + 2x + b$ の最大値を考えると,

$$ax + 2x + b \leq b + \frac{16}{a} = b + 4 \cdot \frac{4}{a} < b + 4 \cdot 3 = b + 12 < 3 + 12 = 15$$

なので, 条件を満たす最小の整数 p は 15 である.

(2) 与えられた式から,

$$\begin{aligned} a_{2k-1} + a_{2k} &= (2k-1)^2 - (2k)^2 \\ &= -4k + 1 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} S_{2m} &= \sum_{k=1}^m (-4k + 1) \\ &= -2m^2 - m = -m(2m + 1) \end{aligned}$$

$$n = 2m \text{ のとき } S_n = -\left(\frac{n}{2}\right)\left(2 \cdot \frac{n}{2} + 1\right) = -\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} S_{2m-1} &= S_{2m} - a_{2m} \\ &= 2m^2 - m = m(2m - 1) \end{aligned}$$

 $n = 2m - 1$ のとき

$$S_n = \frac{n+1}{2}(n+1-1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

となるので, これらをまとめると,

$$S_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
$y = -x + 5$	4	(4,3)	$\left(\frac{44}{25}, \frac{117}{25}\right)$	5	6	5	7	11

(1) (2,3)における円 C_2 の垂線は $y = x + 1$ なので、接線は $y = -x + 5$ となる。

次に、 C_2 は中心が (3,4) で半径が $\sqrt{2}$ の円なので、格子点は $(3 \pm 1, 4 \pm 1)$ の4点しかない。それらを代入すれば、 C_1 上にある点が (4,3) であることは確認できる。

また、 C_1 と C_2 の式を連立させる。もしくは2円の中心を通る直線 $y = \frac{4}{3}x$ についての対称点ということから、もう一方の交点が $\left(\frac{44}{25}, \frac{117}{25}\right)$ であることがわかる。

(2) 条件から $r(n)$ は $0 \leq r(n) \leq 5$ である。したがって

$$0 < a - r(a) < \frac{3}{2}r(b) \leq \frac{15}{2}$$

と $a - r(a)$ が6の倍数であることから、 $a - r(a) = 6$ が分かる。また、 $r(b) \leq 4$ では $6 < \frac{3}{2}r(b)$ の不等号が成立しないので、 $r(b) = 5$ である。

同様の条件から

$$\begin{cases} a - r(a) = 6 & \cdots (A) \\ r(b) = 5 & \cdots (B) \\ b - r(b) = 6 & \cdots (C) \\ r(ab) = 5 & \cdots (D) \end{cases}$$

と分かるので、B,C より $b = 11$ 。そして A,D より $a = 7$ とわかる。

(1) まず、放物線が線分 OA と異なる 2 点で交わるという条件から

$$\begin{cases} 0 < a < 1 & (\text{軸の } x \text{ 座標}) \\ 4(0-a)^2 + b \geq 0 & (x=0 \text{ の } y \text{ 座標}) \\ 4(1-a)^2 + b \geq 0 & (x=1 \text{ の } y \text{ 座標}) \\ (-4a)^2 - 4(4a^2 + b) > 0 & (\text{判別式}) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < a < 1 \\ -4a^2 \leq b \\ -4(1-a)^2 \leq b \\ b < 0 \end{cases}$$

であり、この条件は (2) 以降でも有効である。

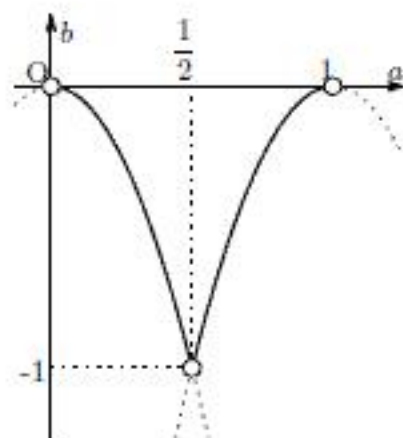
ここで、交点の個数が 2 個になるのは、線分 OA の両端と交わるときだけなので

$$\begin{cases} -4a^2 = b \\ -4(1-a)^2 = b \end{cases} \therefore (a, b) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

(2) 交点の個数が 3 個になるのは、点 O か点 A のどちらか一方のみに接していることが必要十分条件なので、

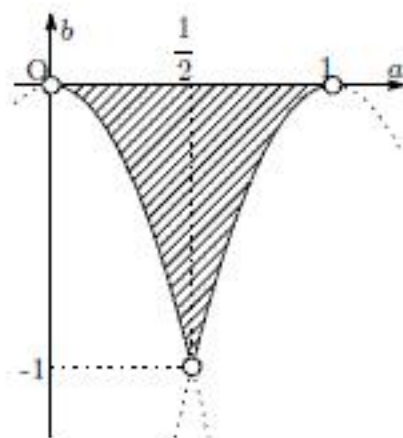
$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ -4a^2 = b \\ -4(1-a)^2 < b \\ b < 0 \end{cases} \quad \text{もしくは} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ -4a^2 < b \\ -4(1-a)^2 = b \\ b < 0 \end{cases}$$

以上より、点 (a, b) が存在する範囲は右図の太線部分 (丸印部分を除く) になる。



(3) 交点の個数が 4 個になるには、点 O と点 A のいずれにも接していないことが必要十分条件なので、条件式は以下のようになり、点 (a, b) が存在する範囲は右図の斜線部 (ただし境界は除く) となる。

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ -4a^2 < b \\ -4(1-a)^2 < b \\ b < 0 \end{cases}$$



(4) 求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} 4a^2 da + \int_{\frac{1}{2}}^1 4(1-a)^2 da = \frac{1}{3}$$