

[1]

(1)

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
$(\frac{2}{3})^n$	$\frac{n2^{n-1}}{3^n}$	$1 - \frac{(n+2)2^{n-1}}{3^n}$	$\frac{2^{n+1}-1}{3^n}$	$1 - \frac{2^{n+1}-1}{3^n}$

(2)

(力)	(キ)	(ク)	(ケ)
$\frac{-2t^2-2t}{t^2+1}$	$x^2 + (y+1)^2 = 2$	$(1, -2)$	$\sqrt{2}$

(注)(2)の(キ)~(ケ)は、次のように図形的に解く方法がある。

2直線 $tx - y = t$ と $x + ty = -2t - 1$ は、 t の値にかかわらず常に垂直に交わる。さらに、それぞれの直線は $A(1, 0)$ と $B(-1, -2)$ を常に通過していることがすぐにわかる。したがって、円周角の定理を使えば、この2直線による交点が、 AB を直径とする円周上にあることがわかる。よってその中心は AB の中点である $(0, -1)$ であり、半径は $\sqrt{2}$ となる。ただし、 $tx - y = t$ は、 t がどのような値をとっても y 軸には垂直にならないので、 $(1, -2)$ が除外される。(図を参照)

[2]

(1) $x = k$ (k は整数) のとき, 問題の不等式を満たす y は $y = 0, 1, \dots, k^2$ までの計 $k^2 + 1$ 個である. k は 0 から n まで動くから, 求める a_n は,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n (k^2 + 1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6) \end{aligned}$$

である.

(2) まず $y^2 \leq n^2$ なので, $-n \leq y \leq n$ に注意する. $y = k$ (k は整数) のとき, 問題の不等式を満たす x は, $x = k^2, k^2 + 1, \dots, n^2$ までの $n^2 + 1 - k^2$ 個である. したがって, もとめる b_n は,

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=-n}^n (n^2 + 1 - k^2) \\ &= (2n+1)(n^2 + 1) - 2 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= (2n+1)(n^2 + 1) - \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{3}(2n+1)(2n^2 - n + 3) \end{aligned}$$

となる.

(3) $c_n = b_{3n}$ であるから,

$$c_n = \frac{1}{3}(6n+1)(18n^2 - 3n + 3)$$

である.

(4) (1) と (3) の結果より,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} &= \frac{(1/6) \cdot 2}{(1/3) \cdot 6 \cdot 18} \\ &= \frac{1}{108} \end{aligned}$$

である.

[3]

(1) 面 ABC のみに注目をしてみると、図のようにになっている。したがって、三角形 QRS の底辺を QS とみれば、底辺は ABC の t 倍、高さは ABC の $1-t$ 倍になっているので、

$$M_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}t(1-t)$$

がわかる。

(2) 三角形 QRS を底面としてみると、この四面体の高さは、もともとの正四面体の高さの $1-t$ 倍である。正四面体 OABC の体積は、(一辺 $\sqrt{2}/2$ の立方体に埋め込んで考えれば) $\sqrt{2}/12$ であることがわかるから、求める体積は

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}t(1-t)^2$$

である。

(3) $f(t) = t(1-t)^2$ の $0 < t < 1$ での動きを調べればよい。 $f'(t) = (1-t)(1-3t)$ より、 $f'(t) = 0$ となる t は $t = 1/3$ である。よって f の増減は以下ようになる。

よって、 f は $t = 1/3$ のとき、最大値 $4/27$ をとる。よって、求める V の最大値は

$$\frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{4}{27} = \frac{\sqrt{2}}{81}$$

である。

(4) 三角形 OQS は二等辺三角形である。三角形 OAQ に余弦定理を適用すると、

$$OQ = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

がわかる。さらに、 $QS = 1/3$ であるから、

$$M_2 = \frac{1}{2} \cdot QS \cdot \sqrt{OQ^2 - \left(\frac{QS}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

である。

[4]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad I_1 &= \int_2^3 \frac{x-3}{x} dx \\
 &= \int_2^3 \left(1 - \frac{3}{x}\right) dx \\
 &= [x - 3 \log x]_2^3 \\
 &= 1 - 3 \log \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

(2) $\frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}$ であるから, $2 \leq x < 3$ において, この値は正ではなく, x について単調に増加している. ゆえに,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x-3}{x} \right| &\text{は } x=2 \text{ で最大, } x=3 \text{ で最小となり,} \\
 0 &\leq \left| \frac{x-3}{x} \right| \leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる.

また, このとき,

$$|I_n| \leq \frac{1}{n} \int_2^3 \left| \frac{x-3}{x} \right|^n dx \leq \frac{1}{n} \int_2^3 \left(\frac{1}{2} \right)^n dx \leq \frac{1}{n 2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるので, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

を得る.

(3) 部分積分により,

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_2^3 \frac{(x-3)^n}{n x^n} dx \\
 &= \left[\frac{(x-3)^{n+1}}{n(n+1)x^n} \right]_2^3 - \int_2^3 \frac{(x-3)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}} \cdot (-n) dx \\
 &= \frac{1}{n(n+1)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n + I_{n+1}
 \end{aligned}$$

を得る.

(4) (3) の漸化式を用いると,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \left(-\frac{1}{2} \right)^n &= \sum_{n=1}^N (I_n - I_{n+1}) \\
 &= I_1 - I_{N+1}
 \end{aligned}$$

を得る.

(2) の結果より, $N \rightarrow \infty$ のとき, $I_{N+1} \rightarrow 0$ なので, 求める和は,

$$I_1 = 1 - 3 \log \frac{3}{2}$$

である.

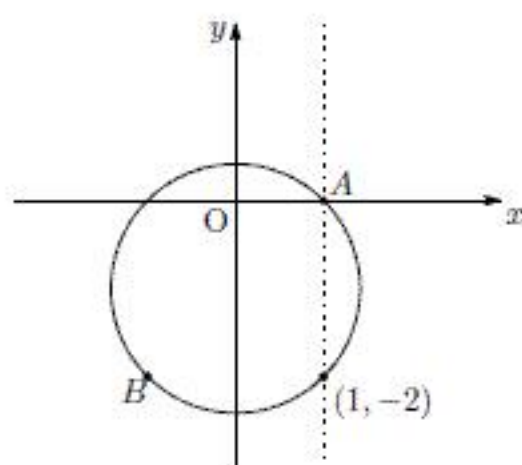


図 1: [1](2) の図

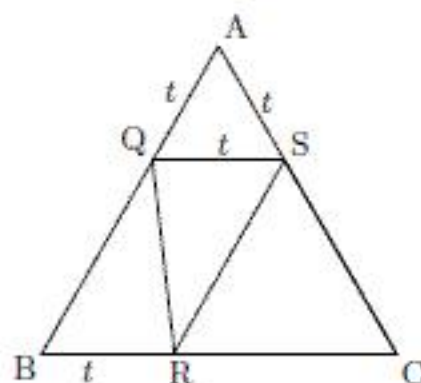


図 2: [3](2)

x	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	極大	↘	

表 1: 3 の増減表