

2008—(E)

数 学 問 題

14:45～15:45 (60分)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙(8ページ)、記述式解答用紙(あ)1枚、記述式解答用紙(い)1枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
なお、記述式解答用紙はセットになっています。監督者の指示に従って、解答用紙を破ったりしないよう注意して、ミシン目に沿って1枚ずつ切り離してください。
3. 試験中に試験用紙の印刷が不鮮明な箇所や汚れなどに気づいた場合は、監督者に申し出てください。
4. 監督者の指示に従って、2枚の記述式解答用紙の受験番号欄(それぞれ2カ所、合計4カ所)に受験番号を記入してください。
5. 解答はすべてHBの黒鉛筆またはHB・0.5mm以上の芯のシャープペンシルで記入してください。
6. 解答は、解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
7. 解答中でない解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
8. 受験中は不審な行動をとってはいけません。不正行為があれば全科目を無効とします。
9. 試験時間の途中で退場することはできません。
ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、監督者に申し出てください。
10. 試験終了のベルが鳴ると同時に解答をやめてください。
11. 問題用紙は試験終了後、持ち帰ってください。

各問題の解答は、解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること。

枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は、採点の対象にはならない。

〔1〕

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

- (1) a, b を正の実数とする. x, y が $ax + y = 6$ を満たすとき, $xy + 2x + b$ は $x = \text{〔ア〕}$ で
最大値 〔イ〕 をとる. $\text{〔ア〕} < 3$ となるような a の値の範囲は $\text{〔ウ〕} < a$ であ
る. さらに, a, b がそれぞれ $a > \text{〔ウ〕}$, $b < 3$ の範囲にあるとき, つねに $\text{〔イ〕} < p$
が成り立つ最小の整数 p は 〔エ〕 である.

- (2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_n = (-1)^{n+1}n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義されるとき, 和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ を n の
式で表したい. まず, $n = 2m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) のとき,

$$S_{2m} = (a_1 + a_2) + \dots + (a_{2m-1} + a_{2m})$$

と書くと, $a_{2k-1} + a_{2k} = \text{〔オ〕}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, m$) であるから, S_{2m} を m の式で表して
 〔カ〕 となる. また, $n = 2m - 1$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) のとき, S_{2m-1} を m の式で表すと
 〔キ〕 となる. 〔カ〕 , 〔キ〕 をまとめて n の式で書き直すと, $S_n = \text{〔ク〕}$
($n = 1, 2, 3, \dots$) と表されることがわかる.

—— このページは白紙です。 ——

〔2〕

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

- (1) xy 平面上の 2 つの円 $C_1: x^2 + y^2 = 25$, $C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 2$ がある。 C_2 上の点 $(2, 3)$ における接線の方程式は (ア) である。 C_2 上に格子点 (x 座標と y 座標がともに整数である点) は全部で (イ) 個あり、そのうち座標が (ウ) である点は C_1 と C_2 の共有点である。 C_1 と C_2 のもう一つの共有点の座標は (エ) である。 (ウ) , (エ) は (a, b) の形で答えよ。

- (2) 正の整数 n を 6 で割った余りを $r(n)$ とおくと、 $0 \leq r(n) \leq$ (オ) である。 2 つの正の整数 a, b は、条件

$$0 < a - r(a) < \frac{3}{2}r(b), \quad 0 < b - r(b) < \frac{3}{2}r(ab)$$

を満たしているとする。 $a - r(a)$ が 6 の倍数であることに着目すると、条件 $0 < a - r(a) < \frac{3}{2}r(b)$ より、 $a - r(a) =$ (カ) , $r(b) =$ (キ) であることがわかる。 同様にして、 $b - r(b) =$ (カ) , $r(ab) =$ (キ) であることがわかる。 したがって、 $a =$ (ク) , $b =$ (ケ) である。

—— このページは白紙です。 ——

[3]

a, b を実数とする. xy 平面において, 放物線 $y = 4(x-a)^2 + b$ が, 4 点 $O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)$ を頂点とする正方形の周と交わる点の個数を数える. ただし, 放物線は辺 OA (両端の点を含む) と異なる 2 点で交わるものとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 交点の個数が 2 であるとき, a, b の値の組 (a, b) を求めよ.
- (2) 交点の個数が 3 であるとき, 点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面上で図示せよ.
- (3) 交点の個数が 4 であるとき, 点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面上で図示せよ.
- (4) 小問 (3) で求めた範囲とその境界線を合わせた部分の面積を求めよ.

—— このページは白紙です。 ——

——— このページは白紙です。 ———