

[1] 答

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} = 2st \quad \boxed{\text{イ}} = t(1 - 4s^2) \quad \boxed{\text{ウ}} = \frac{\pi}{10} \quad \boxed{\text{エ}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$(2) \quad \boxed{\text{オ}} = 2 \quad \boxed{\text{カ}} = \frac{80}{243} \quad \boxed{\text{キ}} = \frac{10}{243} \quad \boxed{\text{ク}} = 1 \quad \boxed{\text{ケ}} = 3$$

$$\boxed{\text{コ}} = \frac{20}{243} \quad \boxed{\text{サ}} = \frac{17}{81}$$

[2] 解答

- (1) C_1 について, $y' = \frac{a}{x}$ である. したがって点 $P(s, a \log s)$ における接線は,

$$y - a \log s = \frac{a}{s}(x - s)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a}{s}x + a(\log s - 1) \quad \cdots \text{答}$$

- (2) C_2 について, $y' = 2x$ であり, 条件から, 2 曲線の $x = s$ における微分係数と, y 座標が等しくなることから,

$$\begin{cases} 2s = \frac{a}{s} & \cdots \cdots \cdots \text{①} \\ a \log s = s^2 & \cdots \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

が成り立つ. ① より $a = 2s^2$. これを② に代入して,

$$2s^2 \log s = s^2$$

$s > 0$ であるから, 両辺を $2s^2$ で割り,

$$\Leftrightarrow \log s = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow s = \sqrt{e} \quad \cdots \text{答}$$

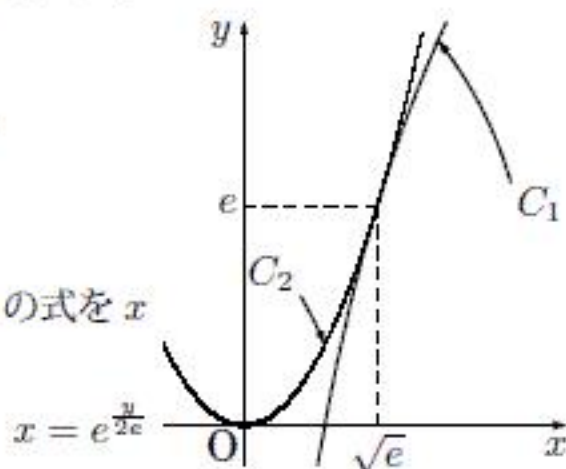
であり, またこのとき, $a = 2s^2 = 2e$ $\cdots \text{答}$

- (3) (2) の a, s のとき, C_1, C_2 のグラフは右のようになる.

$$C_1 : y = 2e \log x$$

$$C_2 : y = x^2$$

また, $P(\sqrt{e}, e)$ である. C_1 の式を x について解くと,



同様に, C_2 についても, $x \geq 0$ に注意して, x について解くと,

$$x = \sqrt{y}$$

したがって, この 2 曲線と, x 軸で囲まれた図形を y 軸周りに回転させた図形の体積 V は,

$$V = \pi \int_0^e \left\{ \left(e^{\frac{y}{2e}} \right)^2 - (\sqrt{y})^2 \right\} dy$$

$$= \pi \left[e \cdot e^{\frac{y}{e}} - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^e$$

$$= \pi \left\{ \left(e \cdot e - \frac{1}{2} e^2 \right) - (e \cdot 1 - 0) \right\}$$

$$= \frac{e^2 - 2e}{2} \pi \quad \cdots \text{答}$$

[3] 解答

- (1) $(x, y) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ …答
- (2) $1 \leq x \leq m-1$ なる自然数 x に応じて, 1 以上の整数 y が $y = m - x$ により定まるので, $m-1$ 個である.
 $\therefore a_m = m-1$ …答
- (3) z について場合分けをして数える.
- (i) $z = 1$ のときこのとき, $x + y = 4$ であるから, (1) の結果から, $(x, y, z) = (1, 3, 1), (2, 2, 1), (3, 1, 1)$ である.
- (ii) $z = 2$ のときこのとき, $x + y = 2$ であるから, $(x, y) = (1, 1)$ のみであり, したがって, $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ となる.
- (iii) $z \geq 3$ のときこのとき, $x + y \leq 0$ となるので, 題意を満たす組は存在しない.

以上より, $(x, y, z) = (1, 3, 1), (2, 2, 1), (3, 1, 1), (1, 1, 2)$ …答

- (4) b_4 $z = 1$ のとき, $x + y = 2$ より, 組の数は $a_2 = 1$ 個.

$z \geq 2$ のとき, $x + y \leq 0$ より存在しない.

- b_5 $z = 1$ のとき, $x + y = 3$ より, 組の数は $a_3 = 2$ 個.

$z \geq 2$ のとき, $x + y \leq 1$ より存在しない.

- b_6 (3) の結果より, 4 個.

- b_7 $z = 1$ のとき, $x + y = 5$ より, 組の数は $a_5 = 4$ 個.

$z = 2$ のとき, $x + y = 3$ より, 組の数は $a_3 = 2$ 個.

$z \geq 3$ のとき, $x + y \leq 1$ より存在しない.

以上まとめると, $b_4 = 1, b_5 = 2, b_6 = 4, b_7 = 6$ …答

- (5) (i) n が奇数のとき, $x + y + 2z = n \Leftrightarrow x + y = n - 2z$ と書けるから, $z = 1$ から始めて, $x + y = n - 2k$ を満たす x, y がなくなる直前の $z = k$ まで, a_{n-2z} の和をとればよい.

$x + y = 1$ なる (1 以上の) x, y は存在せず, $x + y = 3$ なる x, y は存在するので, $n - 2k = 3$, すなわち $k = \frac{n-3}{2}$ まで

和をとればよい. したがって,

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{z=1}^{\frac{n-3}{2}} a_{n-2z} \\ &= \sum_{z=1}^{\frac{n-3}{2}} (n - 2z - 1) \\ &= \frac{n-3}{2}(n-1) - 2 \frac{1}{2} \frac{n-3}{2} \left(\frac{n-3}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n-1)(n-3)}{2} - \frac{(n-1)(n-3)}{4} \\ &= \frac{(n-1)(n-3)}{4} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

- (ii) n が偶数のとき, 奇数のときと同様に考えると, $x + y = 0$ なる x, y は存在せず, $x + y = 2$ なる x, y は存在するので, $n - 2k = 2$, すなわち $k = \frac{n-2}{2}$ まで和をとればよい. したがって,

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{z=1}^{\frac{n-2}{2}} a_{n-2z} \\ &= \sum_{z=1}^{\frac{n-2}{2}} (n - 2z - 1) \\ &= \frac{n-2}{2}(n-1) - 2 \frac{1}{2} \frac{n-2}{2} \left(\frac{n-2}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-2)}{4} \\ &= \frac{(n-2)\{2(n-1) - n\}}{4} \\ &= \frac{(n-2)^2}{4} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

そして, b_n/n^2 は,

$$\frac{b_n}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{n} + \frac{3}{4n^2} & n \text{ が奇数のとき} \\ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^2 & n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

となり, いずれの場合も等しい値に収束するので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{4} \quad \dots \text{答}$$

[4] 解答

$$(1) \quad q = \frac{1}{2}\{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)\} = \frac{1}{2}(p^2 - r^2) \quad \cdots \text{答}$$

また, $p = x + y = (1, 1) \cdot (x, y)$ とベクトルの内積と見れば, $(1, 1)$ と (x, y) のなす角を θ として,

$$p = (1, 1) \cdot (x, y) = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta = \sqrt{2}r \cos \theta$$

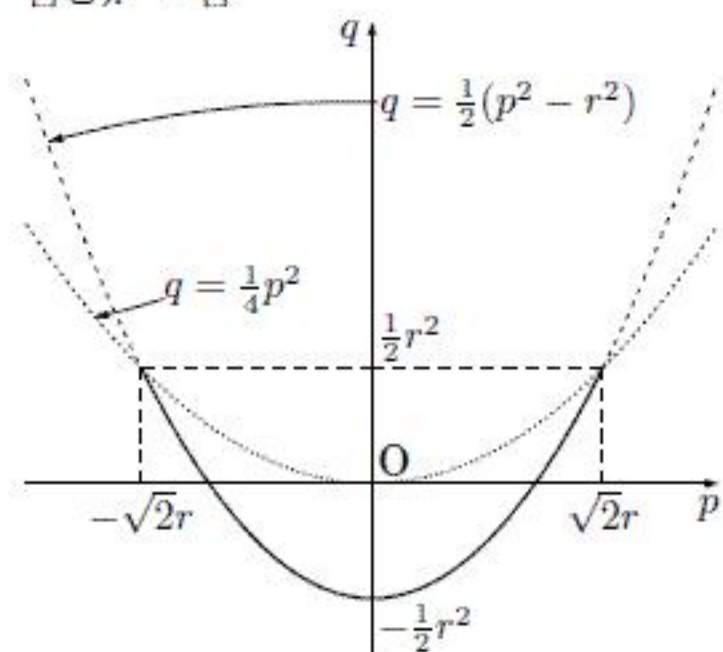
いま, (x, y) は半径 r の円周上を任意に動くから, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ であり, よって $-1 \leq \cos \theta \leq 1$. したがって, p のとりうる値の範囲は

$$-\sqrt{2}r \leq p \leq \sqrt{2}r \quad \cdots \text{答}$$

(2) (1) より (p, q) は放物線 $q = \frac{1}{2}(p^2 - r^2)$ 上を動く. 加えて, x, y は 2 次方程式 $t^2 - pt + q = 0$ の 2 解であるから, この方程式が 2 つの実数解を持つような範囲に (p, q) はなければならない. この方程式の判別式を D とすれば, その条件は,

$$D = p^2 - 4q \geq 0 \Leftrightarrow q \leq \frac{p^2}{4} \quad \cdots (*)$$

と書ける. 以上より, (p, q) の軌跡 C_r は下のようになる (端点を含む). $\cdots \text{答}$



(3) 領域

$$\left\{ (p, q) \mid q = \frac{1}{2}(p^2 - r^2), 1 \leq r \leq 2 \right\}$$

は 2 つの放物線, $q = \frac{1}{2}(p^2 - 1)$ と $q = \frac{1}{2}(p^2 - 4)$ とで挟まれた帯状の部分であり, このうち, (2) で考えた (*) の条件を満たす部分が求める通過範囲である. したがって, これを図示すれば, 次の塗りつぶした部分になる (境界を含む). $\cdots \text{答}$

