

[1]

(1)

ア	$2\sqrt{3}$	イ	$\frac{\pi}{3}$	ウ	1
---	-------------	---	-----------------	---	---

エ	$\frac{\pi}{12}$	オ	$\frac{\pi}{2}$		
---	------------------	---	-----------------	--	--

(2)

カ	126	キ	60	ク	27
---	-----	---	----	---	----

ケ	33	コ	33		
---	----	---	----	--	--

(1)

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{3} \sin 2x + 2(1 + \cos 2x) - (1 - \cos 2x) \\
 &= \sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x + 1 \\
 &= 2\sqrt{3} \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1
 \end{aligned}$$

このとき, $x = \frac{\pi}{12}$ のとき最大, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき最小

(2)

$$\text{カ} : {}_9C_4 = 126$$

$$\text{キ} : {}_3C_1 \times {}_6C_3 = 60$$

$$\text{ク} : {}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 27$$

$$\text{ケ} : \boxed{\text{キ}} - \boxed{\text{ク}} = 33$$

$$\text{コ} : \text{地点Qを通る道順は, } {}_6C_3 \times {}_3C_1 = 60$$

$$\text{よって, } \boxed{\text{カ}} - (\boxed{\text{ケ}} + 60) = 33$$

[2]

(1)

第10群の最後の数は,

$$\sum_{k=1}^{10} 2k = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110$$

また,第 n 群の最後の数は,

$$\sum_{k=1}^n 2k = 2 \times \frac{n \times (n+1)}{2} = n(n+1)$$

(2)

$n(n+1) \geq 2010$ を満たす最小の自然数 n が p であるから,

$$44 \times 45 = 1980, 45 \times 46 = 2070 \text{ より } p = 45.$$

また,このとき $q = 2010 - (p-1)p = 30$.

(3)

第 n 群の最後の数は,(1)より $n(n+1)$ であるから,

第 n 群の最初の数は, $(n-1)n+1 = n^2 - n + 1$.

このとき,

$$S_n = \frac{2n \{ (n^2 - n + 1) + n(n+1) \}}{2} = n(2n^2 + 1)$$

(4)

第 n 群の最後の数は $n(n+1)$ であり,このとき n か $n+1$ のいずれか一方は常に偶数であるから,この数は偶数である.

同様に,第 $(n-1)$ 群の最後の数も偶数となるので,第 n 群の最初の数は奇数となる.

したがって求める T_n は,初項 $n^2 - n + 1$,末項 $n^2 + n - 1$,項数 n の等差数列の和となるので,

$$T_n = \frac{n \{ (n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1) \}}{2} = n^3$$

このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n^2 + 1)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = 2$$

[3]

(1)

半径は $t^2 + 1$ であるから,

$$C_t: (x-t)^2 + (y-t^2)^2 = (t^2+1)^2$$

(2)

C_t の方程式に代入して,

$$(a-t)^2 + \left(-\frac{1}{2} - t^2\right)^2 = (t^2+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2at - a^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$\therefore t = \frac{a}{2} - \frac{3}{8a}$$

(3)

$$(5-t)^2 + (8-t^2)^2 = (t^2+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 17t^2 + 10t - 88 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(17t+44) = 0$$

$$\therefore t = 2, -\frac{44}{17}$$

(4)

点 (p, q) が C_t 上にあるには,

$$(p-t)^2 + (q-t^2)^2 = (t^2+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (2q+1)t^2 + 2pt - (p^2 + q^2 - 1) = 0$$

を満たす実数 t が存在すればよい. この方程式の判別式を D とおくと,

$$D/4 = p^2 + (2q+1)(p^2 + q^2 - 1)$$

$$= (q+1)(2p^2 + 2q^2 - q - 1)$$

$D \geq 0$ を満たすのは,

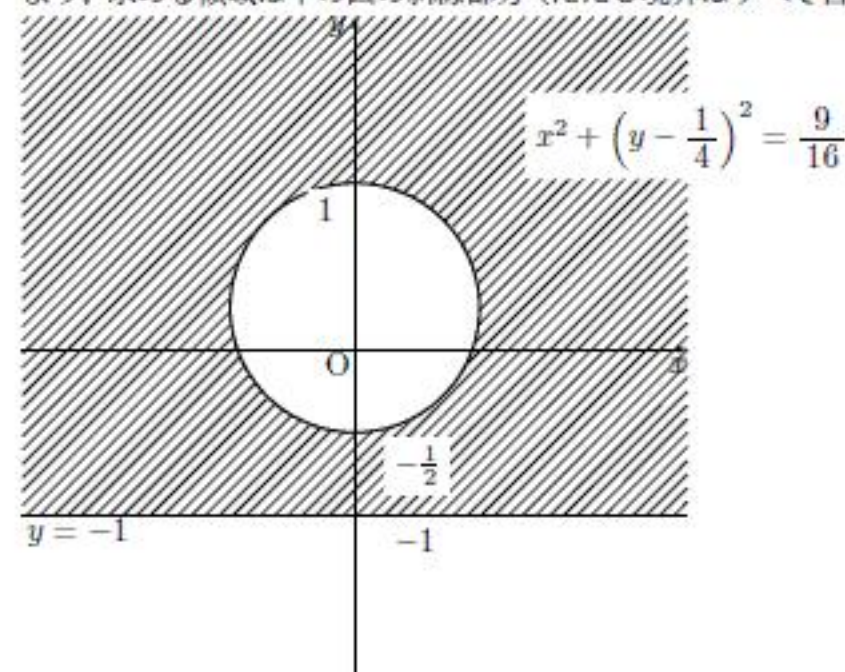
『 $q+1 \geq 0$ かつ $2p^2 + 2q^2 - q - 1 \geq 0$ 』 または 『 $q+1 \leq 0$ かつ

$2p^2 + 2q^2 - q - 1 \leq 0$ 』

ここで,

$$2p^2 + 2q^2 - q - 1 = 0 \Leftrightarrow p^2 + \left(q - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

より, 求める領域は下の図の斜線部分 (ただし境界はすべて含む).



$$C: y = f(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1), \quad l: y = ax \quad (0 < a < 1)$$

$$(1) \quad f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ より, } f'(x) = 0 \text{ から } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって, $f(x)$ の増減は以下のとおり

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

ゆえに, 極大値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

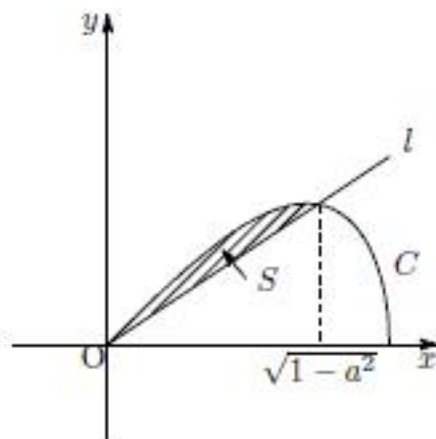
(2) C と l を連立して

$$x\sqrt{1-x^2} = ax \iff x = 0, \sqrt{1-x^2} = a \dots\dots\dots ①$$

$$①, 0 \leq x \leq 1 \text{ より } x = \sqrt{1-a^2}$$

よって, 共有点の x 座標は $0, \sqrt{1-a^2}$

(3)



求める面積は, 図の斜線部で

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{1-a^2}} (x\sqrt{1-x^2} - ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{1-a^2}} - \left[\frac{a}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{1-a^2}} \\ &= \frac{1}{3}(1-a^3) - \frac{1}{2}a(1-a^2) \\ &= \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$