

[1]

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad -2 \qquad \boxed{\text{イ}} \quad 1 \qquad \boxed{\text{ウ}} \quad -3 \qquad \boxed{\text{エ}} \quad 5$$

$$\boxed{\text{オ}} \quad 2$$

$$(2) \quad \boxed{\text{カ}} \quad \frac{7}{250} \qquad \boxed{\text{キ}} \quad \frac{143}{500} \qquad \boxed{\text{ク}} \quad \frac{3}{1000} \qquad \boxed{\text{ケ}} \quad \frac{609}{1000}$$

〔解説〕

(1)

$x^2 + 2ax - a + 2 = 0$  の判別式を  $D$  とすると、この方程式が実数解をもつとき、

$$\frac{D}{4} = a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2, 1 \leq a \qquad \dots \quad \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}$$

この方程式に  $x=1$  を代入すると、

$$1 + 2a - a + 2 = a + 3 = 0$$

$$\therefore a = -3 \qquad \dots \quad \boxed{\text{ウ}}$$

このとき、この方程式は

$$x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1) = 0$$

となるので、他の解は、

$$x = 5 \qquad \dots \quad \boxed{\text{エ}}$$

この方程式が実数解をもたないとき、判別式について

$$\frac{D}{4} = (a+2)(a-1) < 0$$

$$\therefore -2 < a < 1$$

これをみたす整数  $a$  は、

$$a = -1, 0$$

よって、2 個である。  $\dots \quad \boxed{\text{オ}}$

(2)

1 から 1000 までの整数のうち、5 で割り切れる数の集合を  $A$ 、7 で割り切れる数の集合を  $B$ 、9

で割り切れる数の集合を  $C$  とおく。それぞれの要素の個数  $n(A)$ 、 $n(B)$ 、 $n(C)$  は、

$$n(A) = \frac{1000}{5} = 200$$

$$n(B) = \frac{1000-6}{7} = 142$$

$$n(C) = \frac{1000-1}{9} = 111$$

5 と 7 は互いに素なので、5、7 のいずれでも割り切れる数の集合とは、 $5 \times 7 = 35$  の倍数の集合

のことである。よって

$$n(A \cap B) = \frac{1000-20}{35} = 28$$

よって取り出した玉の数字が 5、7 のいずれでも割り切れる確率は、

$$\frac{28}{1000} = \frac{7}{250} \qquad \dots \quad \boxed{\text{カ}}$$

5 または 7 で割り切れる数の集合は  $A \cup B$  とあらわせる。この要素の個数は

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 200 + 142 - 28 \\ &= 314 \end{aligned}$$

ゆえに、5 または 7 のいずれか一方でも割り切れる確率は、

$$\frac{n(A \cup B) - n(A \cap B)}{1000} = \frac{314 - 28}{1000} = \frac{143}{500} \qquad \dots \quad \boxed{\text{キ}}$$

5、7、9 は互いに素なので、5、7、9 のいずれでも割り切れる数の集合は、 $5 \times 7 \times 9 = 315$  の倍数の

集合のことである。よって、

$$n(A \cap B \cap C) = \frac{1000-55}{315} = 3$$

よって取り出した玉の数字が 5、7、9 のいずれでも割り切れる確率は、

$$\frac{3}{1000} \qquad \dots \quad \boxed{\text{ク}}$$

5 と 9 は互いに素なので、5、9 のいずれでも割り切れる数の集合とは、 $5 \times 9 = 45$  の倍数の集合

のことである。よって

$$n(A \cap C) = \frac{1000-10}{45} = 22$$

7 と 9 は互いに素なので、7、9 のいずれでも割り切れる数の集合とは、 $7 \times 9 = 63$  の倍数の集合

のことである。よって

$$n(B \cap C) = \frac{1000-55}{63} = 15$$

5、7、9 のいずれでも割り切れない数字の集合は、 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$  となるので、

$$\begin{aligned} &n(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \\ &= n(\overline{A \cup B \cup C}) \\ &= 1000 - n(A \cup B \cup C) \\ &= 1000 - \{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)\} \\ &= 1000 - (200 + 142 + 111 - 28 - 15 - 22 + 3) \\ &= 609 \end{aligned}$$

よって取り出した玉の数字が 5、7、9 のいずれでも割り切れない確率は、

$$\frac{609}{1000} \qquad \dots \quad \boxed{\text{ケ}}$$

[2]

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad 39 \qquad \boxed{\text{イ}} \quad 43 \qquad \boxed{\text{ウ}} \quad 2 \qquad \boxed{\text{エ}} \quad 6$$

$$(2) \quad \boxed{\text{オ}} \quad \sqrt{3} \qquad \boxed{\text{カ}} \quad -2\sqrt{3}-2 \qquad \boxed{\text{キ}} \quad \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \boxed{\text{ク}} \quad \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

〔解説〕

(1)

$$38 \leq \log_{10} 8^n < 39$$

より,

$$10^{38} \leq 8^n < 10^{39}$$

この式から,  $8^n$  は, 39桁の数の中で最も小さい数字である  $10^{38}$  以上であり, 40桁の数の中で最も小さい数字である  $10^{39}$  未満であるとわかる。よって,  $8^n$  の桁数は

$$39 \text{ 桁} \qquad \dots \quad \boxed{\text{ア}}$$

である。

$$\log_{10} 8^n = 3n \times \log_{10} 2 = 0.9030 \times n$$

から, 与えられた不等式を変形すると,

$$\frac{38}{0.9030} \leq n < \frac{39}{0.9030}$$

$$\therefore 42.081\dots \leq n < 43.189\dots$$

$n$  は自然数なので,

$$n = 43 \qquad \dots \quad \boxed{\text{イ}}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$  を代入すると,  $8^n$  の値は

$$\begin{aligned} &8 \\ &64 \\ &512 \\ &4096 \\ &32768 \\ &\vdots \end{aligned}$$

となるが, このとき一の位は 8, 4, 2, 6 を周期的に繰り返す。

( $\because$  整数同士のかけ算では, 積の一の位は, かける数とかけられる数の一の位によってのみ決まる。よって  $8^n$  の一の位は確かに周期的になる。)

ここで

$$43 = 4 \times 10 + 3$$

より,  $8^{43}$  の一の位は  $n = 3$  のときの一の位と一致し, つまり 2 となる。  $\dots \quad \boxed{\text{ウ}}$

$$\log_{10} 8^{43} = 43 \times 3 \times \log_{10} 2 = 38.8290$$

$$\log_{10} 6 \times 10^{38} = 38 + \log_{10} 6 = 38.7781$$

$$\log_{10} 7 \times 10^{38} = 38 + \log_{10} 7 = 38.8451$$

より,

$$\log_{10} (6 \times 10^{38}) \leq \log_{10} 8^{43} < \log_{10} (7 \times 10^{38})$$

が成り立つので,  $8^{43}$  の最高位の数字は 6 とわかる。  $\dots \quad \boxed{\text{エ}}$

(2)

$$|\overrightarrow{\text{OA}}| = \sqrt{1^2 + 0} = 1$$

であるので,

$$\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 1 \cdot 2 \cdot \cos(180^\circ - 150^\circ) = \sqrt{3} \qquad \dots \quad \boxed{\text{オ}}$$

ここで  $\overrightarrow{\text{AC}} = (x, y)$  とおくと,  $\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \sqrt{3}$  より

$$1 \cdot x + 0 \cdot y = \sqrt{3}$$

$$\therefore x = \sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{\text{AC}}| = 2 \text{ より}$$

$$(\sqrt{3})^2 + y^2 = 2^2$$

$$\therefore y = 1 \quad (\because y > 0)$$

であるから,  $\overrightarrow{\text{AC}} = (\sqrt{3}, 1)$  である。よって

$$\overrightarrow{\text{CB}} = \overrightarrow{\text{OB}} - \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{AC}} = (-1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$$

となるので,

$$\overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = \sqrt{3} \cdot (-1 - \sqrt{3}) + 1 \cdot (1 - \sqrt{3}) = -2\sqrt{3} - 2 \qquad \dots \quad \boxed{\text{カ}}$$

また,

$$\overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = |\overrightarrow{\text{AC}}| \cdot |\overrightarrow{\text{CB}}| \cos \alpha$$

$$= 2 \cdot 2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$= -2 - 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \qquad \dots \quad \boxed{\text{キ}}$$

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}}}{|\overrightarrow{\text{OA}}| \cdot |\overrightarrow{\text{CB}}|} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{1 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \qquad \dots \quad \boxed{\text{ク}}$$

[3]

(1)

$C: y = x^2 - 2x + 4$  上に点  $M(m, m^2 - 2m + 4)$  をとる。( $m$  は実数とする。)

$$y' = 2x - 2$$

より、点  $M$  での放物線の傾きは  $2m - 2$  となるので、点  $M$  での接線は、

$$\begin{aligned} y &= (2m - 2)(x - m) + m^2 - 2m + 4 \\ &= (2m - 2)x - m^2 + 4 \end{aligned}$$

この接線が点  $A(a, a)$  を通るとき、

$$\begin{aligned} a &= (2m - 2)a - m^2 + 4 \\ \Leftrightarrow m^2 - 2am + 3a - 4 &= 0 \quad \dots \text{①} \end{aligned}$$

この方程式の判別式を  $D$  とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= a^2 - 3a + 4 \\ &= \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \\ &> 0 \end{aligned}$$

よって、 $m$  は必ず異なる 2 つの実数解をもつ。これはつまり、点  $A(a, a)$  を通る接線が 2 本存在することを意味する。よって点  $A(a, a)$  から  $C$  に 2 本の接線が引けることが示された。

(証明終)

①を  $m$  について解いたときの 2 つの解が  $p, q$  に一致するので、解と係数の関係から、

$$p + q = 2a, \quad pq = 3a - 4$$

(答)  $p + q = 2a, \quad pq = 3a - 4$

(2)

以下、 $p < q$  として考えても差し支えないので  $p < q$  として考える。接線はそれぞれ、

$$y = (2p - 2)x - p^2 + 4, \quad y = (2q - 2)x - q^2 + 4$$

と表せる。よって面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_p^a \left[ (x^2 - 2x + 4) - \{(2p - 2)x - p^2 + 4\} \right] dx + \int_a^q \left[ (x^2 - 2x + 4) - \{(2q - 2)x - q^2 + 4\} \right] dx \\ &= \int_p^a (x - p)^2 dx + \int_a^q (x - q)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \{ (a - p)^3 - (a - q)^3 \} \\ &= \frac{1}{3} \{ 3a^2(q - p) - 3a(q^2 - p^2) + (q^3 - p^3) \} \\ &= \frac{1}{3} (q - p) \{ 3a^2 - 3a(q + p) + (q + p)^2 - pq \} \\ &= \frac{1}{3} (q - p) (a^2 - 3a + 4) \end{aligned}$$

ただし、途中  $p + q = 2a, \quad pq = 3a - 4$  を用いた。ここで①より

$$\begin{aligned} q - p &= \left( a + \sqrt{a^2 - 3a + 4} \right) - \left( a - \sqrt{a^2 - 3a + 4} \right) \\ &= 2\sqrt{a^2 - 3a + 4} \end{aligned}$$

であるから、

$$S = \frac{2}{3} (a^2 - 3a + 4)^{\frac{3}{2}}$$

(答)  $S = \frac{2}{3} (a^2 - 3a + 4)^{\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned} S' &= (a^2 - 3a + 4)^{\frac{1}{2}} (2a - 3) \\ &= 2 \left( a - \frac{3}{2} \right) \left\{ \left( a - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となるので、増減表は以下のようになる。

|      |            |               |            |
|------|------------|---------------|------------|
| $a$  | $\cdots$   | $\frac{3}{2}$ | $\cdots$   |
| $S'$ | $-$        | $0$           | $+$        |
| $S$  | $\searrow$ |               | $\nearrow$ |

よって、 $a = \frac{3}{2}$  で  $S$  は最小値をとり、そのときの値は

$$S = \frac{2}{3} \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \right\} = \frac{7\sqrt{7}}{12}$$

(答)  $S = \frac{7\sqrt{7}}{12}$