

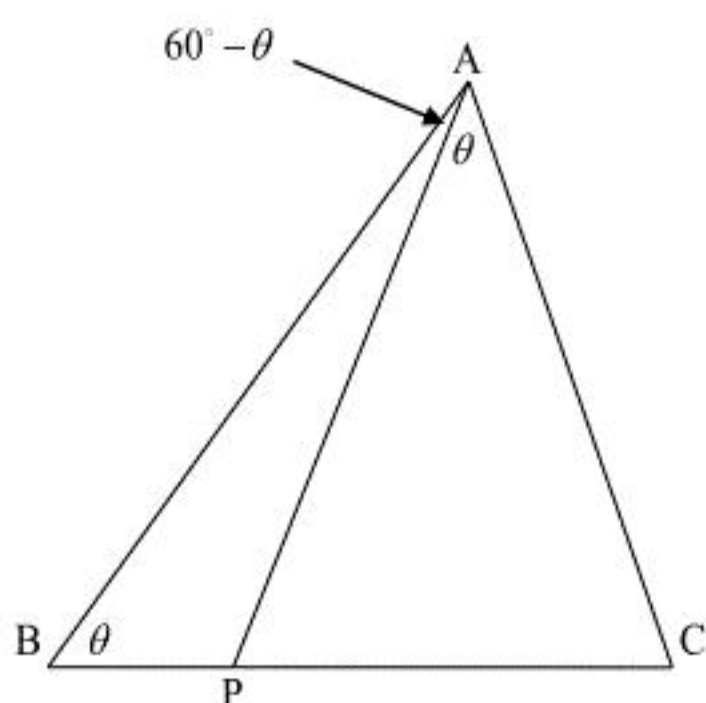
【1】

(1)	ア	60°	イ	$\sqrt{1-x+x^2}$	ウ	$\frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}$
	エ	$\frac{x}{\sqrt{1-x+x^2}}$	オ	$\frac{\sqrt{3}x(1-x)}{4(1-x+x^2)}$		
(2)	カ	$20-x$	キ	$15-x$	ク	11
	ケ	36	コ	35		

【解説】

(1)

$\angle CAP = \angle ABP = \theta$ とおく。



図より、

$$\begin{aligned}\angle APC &= \angle BAP + \angle ABP \\ &= (60^\circ - \theta) + \theta \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

$\triangle ABC$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}BC^2 &= 1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cos 60^\circ \\ &= 1 - x + x^2 \\ \therefore BC &= \sqrt{1 - x + x^2}\end{aligned}$$

いま $\triangle ABC$ と $\triangle PAC$ について

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \angle APC \\ \angle ABC &= \angle PAC\end{aligned}$$

なので、 $\triangle ABC \sim \triangle PAC$ である。相似比は

$$\begin{aligned}BC : AC &= \sqrt{1 - x + x^2} : x \\ &= 1 : \frac{x}{\sqrt{1 - x + x^2}}\end{aligned}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned}CP &= \frac{x}{\sqrt{1 - x + x^2}} CA = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x + x^2}} \\ AP &= \frac{x}{\sqrt{1 - x + x^2}} BA = \frac{x}{\sqrt{1 - x + x^2}}\end{aligned}$$

また $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} x$$

$\triangle ABC$ と $\triangle PAC$ の面積比は

$$1^2 : \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x + x^2}} \right)^2 = 1 : \frac{x^2}{1 - x + x^2}$$

なので、

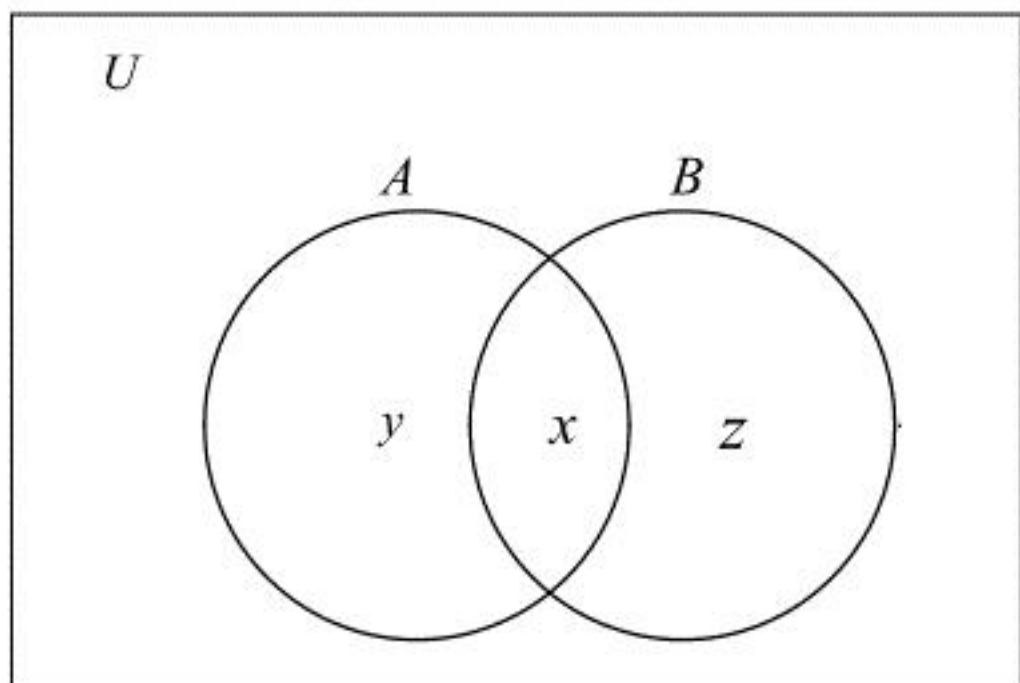
$$\triangle PAC = \frac{x^2}{1 - x + x^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} x = \frac{\sqrt{3} x^2}{4(1 - x + x^2)}$$

したがって

$$S = \triangle ABC - \triangle PAC = \frac{\sqrt{3} x(1 - x)}{4(1 - x + x^2)}$$

(2)

A に正解した人の集合を A 、B に正解した人の集合を B とする。また全体の集合を U とする。



集合 A に含まれる人数は 20 人なので

$$x + y = 20 \quad \dots \text{①}$$

集合 B に含まれる人数は 15 人なので

$$z + x = 15 \quad \dots \text{②}$$

また A、B のうちどちらか一方のみ正解した人が 13 人なので

$$y + z = 13 \quad \dots \text{③}$$

①より

$$y = 20 - x$$

②より

$$z = 15 - x$$

これらを③に代入すると

$$\begin{aligned}(20 - x) + (15 - x) &= 13 \\ \therefore x &= 11\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}y &= 9 \\ z &= 4\end{aligned}$$

A、B の 2 問とも正解しなかった人は

$$60 - x - y - z = 36 \text{ 人}$$

x 人の人は 2 ポイント獲得し、 $y + z$ 人の人は 1 ポイントを獲得するので、60 人が獲得した総ポイントは

$$2 \cdot 11 + 1 \cdot (9 + 4) = 35 \text{ ポイント}$$

〔2〕

(1)	ア	3	イ	3	ウ	$\frac{7}{8}\pi$
	エ	$3\sqrt{2}-2$	オ	$\frac{3}{8}\pi$	カ	$-3\sqrt{2}-2$
(2)	キ	1	ク	8	ケ	129
	コ	6				

〔解説〕

(1)

与式に $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ を用いて

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \cos^2 \theta - 6 \cos \theta \sin \theta - 5 \sin^2 \theta \\&= 6 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta \sin \theta - 5\end{aligned}$$

いま

$$\begin{aligned}2 \cos \theta \sin \theta &= \sin 2\theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}f(\theta) &= 6 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 3 \sin 2\theta - 5 \\&= 3 \cos 2\theta - 3 \sin 2\theta - 2\end{aligned}$$

また三角関数の合成を行うと

$$\begin{aligned}\cos 2\theta - \sin 2\theta &= \sqrt{2} \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ \therefore f(\theta) &= 3\sqrt{2} \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 2\end{aligned}$$

$0 \leq \theta < \pi$ なので、

$$\frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

ゆえに $f(\theta)$ は

$$2\theta + \frac{\pi}{4} = 2\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{7}{8}\pi$$

のとき最大値

$$f\left(\frac{7}{8}\pi\right) = 3\sqrt{2} \cdot 1 - 2 = 3\sqrt{2} - 2$$

をとる。また

$$2\theta + \frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{3}{8}\pi$$

のとき最小値

$$f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = 3\sqrt{2}(-1) - 2 = -3\sqrt{2} - 2$$

をとる。

(2)

すべての a_n について $a_n = a$ となるので、 $a_n = a_{n+1} = a$ として

$$\begin{aligned}a &= 2a - 1 \\ \therefore a &= 1\end{aligned}$$

また $a = 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n - 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 &= 2(a_n - 1)\end{aligned}$$

ゆえに数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a - 1 = 1$ 、公比 2 の等比数列となり

$$\begin{aligned}a_n - 1 &= 2^{n-1} \cdot 1 \\ \therefore a_n &= 1 + 2^{n-1}\end{aligned}$$

$a_n \geq 100$ のとき

$$\begin{aligned}1 + 2^{n-1} &\geq 100 \\ \Leftrightarrow 2^{n-1} &\geq 99\end{aligned}$$

$2^6 = 64$, $2^7 = 128$ なのでこれを満たす最小の n は、 $n-1=7$ より $n=8$ である。

このとき

$$a_{n_1} = 1 + 2^7 = 129$$

である。

漸化式 $b_{n+1} = 2b_n - 30$ を変形すると

$$b_{n+1} - 30 = 2(b_n - 30)$$

数列 $\{b_n\}$ の初項は $129 - 100 = 29$ なので、

$\{b_n - 30\}$ は初項 $29 - 30 = -1$ 、公比 2 の等比数列となり、

$$\begin{aligned}b_n - 30 &= 2^{n-1}(-1) \\ \therefore b_n &= 30 - 2^{n-1}\end{aligned}$$

よって $b_n < 0$ のとき

$$\begin{aligned}30 - 2^{n-1} &< 0 \\ \Leftrightarrow 2^{n-1} &> 30\end{aligned}$$

$2^4 = 16$, $2^5 = 32$ なのでこれを満たす最小の n は、 $n-1=5$ より $n=6$ である。

[3]

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x-2)(x+1)\end{aligned}$$

なので、 $f'(x)=0$ とすると $x=-1, 2$ となる。よって次のような増減表が書ける。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ゆえに $a=-1$ 、 $b=2$ であり、

$$f(a) = f(-1) = 8$$

$$f(b) = f(2) = -19$$

(答) $a=-1$

$$f(a) = 8$$

$$b=2$$

$$f(b) = -19$$

(2)

点 $P(-1, 8)$ 、点 $Q(2, -19)$ より、中点 M は

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$$

である。いま

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= -\frac{11}{2}\end{aligned}$$

なので、 $y=f(x)$ は点 M を通る。ゆえに線分 PQ と曲線 $y=f(x)$ は点 M を共有する。

(証明終)

(3)

点 M を通る直線は実数 k を用いて

$$y = k\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{11}{2}$$

と表せる。これと $y=f(x)$ を連立させて

$$\begin{aligned}k\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{11}{2} &= 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \\ \Leftrightarrow (2x-1)(2x^2 - 2x - k - 13) &= 0\end{aligned}$$

よって点 M を通る直線と曲線 $y=f(x)$ が点 M 以外の 2 つの共有点をもつとき、その x 座標は

$$\begin{aligned}2x^2 - 2x - k - 13 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1 \pm \sqrt{2k+27}}{2}\end{aligned}$$

(これから、2 つの共有点をもつための条件は $k > -\frac{27}{2}$ である。)

いま $\frac{\sqrt{2k+27}}{2} = \alpha$ とおけば $x = \frac{1}{2} \pm \alpha$ であり、2 つの共有点の座標は

$$R\left(\frac{1}{2} + \alpha, f\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\right), S\left(\frac{1}{2} - \alpha, f\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right)$$

である。ここで

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) + f\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \\ &= 2\left\{\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^3 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^3\right\} - 3\left\{\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2\right\} - 12\left\{\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right\} + 2 \\ &= 2\left(\frac{1}{4} + 3\alpha^2\right) - 3\left(\frac{1}{2} + 2\alpha^2\right) - 12 + 2 \\ &= -11\end{aligned}$$

よって $R\left(\frac{1}{2} + \alpha, f\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\right), S\left(\frac{1}{2} - \alpha, f\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right)$ の中点は

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$$

となりこれは点 M に一致するので、点 M は線分 RS の中点である。

(証明終)