

〔1〕

〔解答〕

$$(1) \quad \text{ア} \quad -2\sqrt{3} \quad \text{イ} \quad 2\sqrt{3} \quad \text{ウ} \quad \frac{7}{2} \quad \text{エ} \quad 4 \quad \text{オ} \quad \frac{7}{2}$$

$$(2) \quad \text{カ} \quad 495 \quad \text{キ} \quad 3168 \quad \text{ク} \quad 11880 \quad \text{ケ} \quad 5544$$

〔解説〕

(1)

$f(x) = 3x^2 - ax + 1$ とおく。2次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると、 $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつとき

$$D > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow a < -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} < a \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $f(x) = 0$ の2つの実数解のうちの1つだけが $\frac{1}{2} < x < 1$ の範囲にあるのは

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{4} - \frac{a}{2}\right)(4 - a) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} < a < 4$$

となり、これは①を満たす。次に

$$f(x) = 3\left(x - \frac{a}{6}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{12}$$

であることから、 $f(x) = 0$ の実数解が2つとも $\frac{1}{2} < x$ の範囲にあるとき

$$\textcircled{1} \text{かつ} \frac{a}{6} > \frac{1}{2} \text{かつ} f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow a < -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} < a \text{かつ} a > 3 \text{かつ} a < \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} < a < \frac{7}{2}$$

となる。

(2)

Aグループが全て男子となるようなグループ分けの方法は、男子12人から8人を選ぶ選び方と等しく

$${}_{12}C_8 = 495 \text{通り}$$

ある。次に、Aグループに入る女子が1人であるようなグループ分けの方法は、男子12人から7人を選び、女子4人から1人を選ぶ選び方に等しく

$${}_{12}C_7 \times {}_4C_1 = 3168 \text{通り}$$

ある。また、グループ分けの方法は全部で

$${}_{16}C_8 = 12870 \text{通り}$$

ある。どちらのグループにも女子が最低1人は入るようなグループ分けの方法は、一方のグループに女子が入らないグループ分けの方法の余事象であり、いずれか一方のグループに女子が入らないグループ分けの方法は上記の結果より 495×2 通りであるから

$$12870 - 495 \times 2 = 11880 \text{通り}$$

となる。どちらのグループにも女子が2人入るようなグループ分けの方法は、男子12人から6人、女子4人から2人を選ぶ選び方に等しく

$${}_{12}C_6 \times {}_4C_2 = 5544 \text{通り}$$

ある。

〔2〕

〔解答〕

$$(1) \quad \text{ア} \quad 1-\sqrt{6} \quad \text{イ} \quad 1+\sqrt{6} \quad \text{ウ} \quad -\frac{6}{7} \quad \text{エ} \quad 2 \quad \text{オ} \quad \sqrt{5}$$

$$(2) \quad \text{カ} \quad -\frac{1}{4} \quad \text{キ} \quad \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{ク} \quad -\frac{3}{2} \quad \text{ケ} \quad \frac{11}{32} \quad \text{コ} \quad \frac{11}{8}$$

〔解説〕

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2mx + 2my + 3m^2 - 2m - 5 = 0 \quad \cdots \text{①}$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y+m)^2 = -m^2 + 2m + 5$$

であるから、方程式①が円を表すのは

$$\begin{aligned} -m^2 + 2m + 5 &> 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 2m - 5 &< 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \sqrt{6} < m < 1 + \sqrt{6} &\cdots \text{②} \end{aligned}$$

のときである。②のとき、①で表される円 C は中心 $(m, -m)$ 、半径 $\sqrt{-m^2 + 2m + 5}$ の円となる。

円 C の中心 $(m, -m)$ と直線 $y = 2x - 1$ との距離を d とおくと

$$\begin{aligned} d &= \frac{|2m - (-m) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|3m - 1|}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

であるから、円 C と直線 $y = 2x - 1$ が共有点をもつとき

$$\begin{aligned} d &\leq \sqrt{-m^2 + 2m + 5} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{|3m - 1|}{\sqrt{5}} \right)^2 &\leq -m^2 + 2m + 5 \\ \Leftrightarrow 7m^2 - 8m - 12 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (7m + 6)(m - 2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{6}{7} &\leq m \leq 2 \end{aligned}$$

となり、これは②を満たす。さらに、 $m = 2$ のとき

$$d = \sqrt{5}$$

となる。

(2)

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ &= \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

となり、 $0 < A < \pi$ より $\sin A > 0$ であることから

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= |\overline{AB}| |\overline{AC}| \cos A \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。次に、点 H が線分 BC を $t:(1-t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点であるから

$$\overline{AH} = (1-t)\overline{AB} + t\overline{AC}$$

となり、線分 AH と線分 BC が直交するとき

$$\begin{aligned} \overline{AH} \cdot \overline{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(1-t)\overline{AB} + t\overline{AC}\} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(1-t)|\overline{AB}|^2 + t|\overline{AC}|^2 + (1-2t)(\overline{AB} \cdot \overline{AC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 16t - \frac{11}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{11}{32} \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} BH &= tBC \\ &= \frac{11}{8} \end{aligned}$$

である。

[3]

(1)

$$f(x) = \int_{-2}^x \{-at^2 + (a^2 - 1)t + a\} dt \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -ax^2 + (a^2 - 1)x + a \\ &= -(ax + 1)(x - a) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $a > 0$ より $-\frac{1}{a} < 0 < a$ となるから、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{1}{a}$	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

以上より、 $f(x)$ は $x = a, -\frac{1}{a}$ で極値をとる。

(答) 増減表：前表、極値をとるとき x の値： $x = a, -\frac{1}{a}$

(2)

$f(-2) = 0$ であるから、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(-2, f(-2))$ におけるこの曲線の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(-2)(x + 2) + f(-2) \\ &= -(2a^2 + 3a - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

となる。よって、この直線が点 $(0, -6)$ を通るとき

$$\begin{aligned} -6 &= -2(2a^2 + 3a - 2) \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 3a - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a + 5)(a - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a = 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。

(答) $a = 1$

(3)

$a = 1$ とするとき、(1)の結果を用いて、 $-2 \leq x \leq 2$ の範囲における関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-2	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

ここで

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-2}^x (-t^2 + 1) dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + t \right]_{-2}^x \\ &= -\frac{x^3}{3} + x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

より

$$f(-2) = 0, f(-1) = -\frac{4}{3}, f(1) = 0, f(2) = -\frac{4}{3}$$

となるから、 $-2 \leq x \leq 2$ の範囲において関数 $f(x)$ は

$x = -2, 1$ のとき最大値 0

$x = -1, 2$ のとき最小値 $-\frac{4}{3}$

をとる。

(答) 最大値 0, 最小値 $-\frac{4}{3}$