

〔1〕

〔解答〕

$$(1) \quad \text{ア} \quad 4(2-x) \quad \text{イ} \quad \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \quad \text{ウ} \quad 5x(1-x) \quad \text{エ} \quad \frac{25}{4} \quad \text{オ} \quad \frac{145}{16}$$

$$(2) \quad \text{カ} \quad \frac{1}{7} \quad \quad \quad \text{キ} \quad \frac{3}{7} \quad \quad \quad \text{ク} \quad \frac{4}{7} \quad \quad \quad \text{ケ} \quad \frac{6}{77} \quad \quad \quad \text{コ} \quad \frac{29}{77}$$

〔解説〕

(1)

放物線 $y = 4x^2 - 4x$ と直線 $y = 2x + 4$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x &= 2x + 4 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x-2)(2x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{2}, 2 \end{aligned}$$

であるから、このうち正である 2 が点 A の x 座標となり、点 B の x 座標は $-\frac{1}{2}$ となる。よって、

点 A の座標は $(2, 8)$ 、点 B の座標は $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ である。これより、 $A'(2, 0)$ 、 $B'\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ となるから

$$\begin{aligned} \triangle PAA' &= 8 \times (2-x) \times \frac{1}{2} \\ &= 4(2-x) \\ \triangle PBB' &= 3 \times \left\{ x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \\ \triangle PA'B' &= \left\{ 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} \times \left\{ -(4x^2 - 4x) \right\} \times \frac{1}{2} \\ &= 5x(1-x) \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} S &= 4(2-x) + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} + 5x(1-x) \\ &= -5x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{35}{4} \\ &= -5\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{145}{16} \end{aligned}$$

である。 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で x が変化するとき

$$\begin{aligned} x=1 \text{ のとき最小値 } S &= \frac{25}{4} \\ x=\frac{1}{4} \text{ のとき最大値 } S &= \frac{145}{16} \end{aligned}$$

をとる。

(2)

すべての玉の取り出し方は同様に確からしいとする。袋 A から 2 個の玉を同時に取り出すとき、取り出し方は全部で ${}_7C_2 = 21$ 通りあり、それらの玉がどちらも赤色であるような取り出し方は ${}_3C_2 = 3$ 通りある。よって、袋 A から取り出した 2 個の玉がどちらも赤色である確率は

$$\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

となる。取り出した玉が両方とも白色であるような取り出し方は ${}_4C_2 = 6$ 通りあるから、取り出した玉が同じ色である確率は

$$\frac{3+6}{21} = \frac{3}{7}$$

であり、取り出した玉が違う色である確率は、この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

となる。また、袋 A からは 2 個、袋 B からは 1 個の玉を同時に取り出すとき、袋 B から赤玉を取り出す確率は $\frac{6}{11}$ であることから、取り出した玉がすべて赤玉である確率は

$$\frac{1}{7} \times \frac{6}{11} = \frac{6}{77}$$

となる。取り出した玉のうち 2 個が赤玉、 1 個が白玉であるのは

[1] 袋 A から 2 個の赤玉、袋 B から 1 個の白玉を同時に取り出す場合

[2] 袋 A から赤玉と白玉を 1 個ずつ、袋 B から 1 個の赤玉を同時に取り出す場合

のいずれかである。[1]となる確率は $\frac{1}{7} \times \frac{5}{11}$ 、[2]となる確率は $\frac{4}{7} \times \frac{6}{11}$ であり、これらは互いに排

反であるから、取り出した玉のうち 2 個が赤玉、 1 個が白玉である確率は

$$\frac{1}{7} \times \frac{5}{11} + \frac{4}{7} \times \frac{6}{11} = \frac{29}{77}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

$$(1) \quad \text{ア} \quad 3-a \quad \text{イ} \quad 6-2a \quad \text{ウ} \quad 2(3-a)^2 \quad \text{エ} \quad 1 \quad \text{オ} \quad 8$$

$$(2) \quad \text{カ} \quad \frac{x}{2} \quad \text{キ} \quad \frac{2}{5} \quad \text{ク} \quad \frac{3}{5} \quad \text{ケ} \quad \frac{1+\sqrt{97}}{12}$$

〔解説〕

(1)

$$2x+y=12-4a \text{ より}$$

$$\begin{aligned} xy &= x(-2x+12-4a) \\ &= -2\{x-(3-a)\}^2 + 2(3-a)^2 \end{aligned}$$

となるから

$$x=3-a, 2x+y=12-4a \text{ つまり } x=3-a, y=6-2a \text{ のとき最大値 } 2(3-a)^2$$

をとる。さらに、 a の値が $0 < a \leq 3$ の範囲で変化するとき、 a の関数 $f(a) = 2a(3-a)^2$ について

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2(3-a)^2 + 2a \cdot 2(3-a) \cdot (-1) \\ &= 6(3-a)(1-a) \end{aligned}$$

であるから、関数 $f(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	0	...	1	...	3
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗		↘	

よって、 $f(a)$ は

$$a=1 \text{ のとき最大値 } f(1)=8$$

をとる。

(2)

$$AB=1, \angle BAC=60^\circ, |\overline{AC}|=x \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos \angle BAC \\ &= 1 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

である。辺 BC 上の点 P は辺 BC を $3:2$ に内分しているとする

$$\overline{AP} = \frac{2}{5}\overline{AB} + \frac{3}{5}\overline{AC}$$

となる。さらに、 $\overline{AP}$ と $\overline{BC}$ が垂直であるとき

$$\begin{aligned} \overline{AP} \cdot \overline{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\overline{AB} + \frac{3}{5}\overline{AC} \right) \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{5}|\overline{AB}|^2 + \frac{3}{5}|\overline{AC}|^2 - \frac{1}{5}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{2}{5} &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x^2 - x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{12} \end{aligned}$$

となり、 $x > 0$ であることより $x = \frac{1+\sqrt{97}}{12}$ である。

[3]

(1)

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 2x + 1$ とするとき

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 2$$

である。 $f(x)$ が 3 次関数であることから、曲線 $y = f(x)$ のグラフと 2 つの接点をもつような直線は存在しない。よって、傾きが m である接線が 2 本引けるとき

$$f'(x) = m$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6ax + 2 - m = 0$$

を満たす実数 x の値が異なる 2 つ存在する。このとき、 x の 2 次方程式 $3x^2 - 6ax + 2 - m = 0$ の判別式を D とおくと

$$D > 0$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 - 3(2 - m) > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 2 - 3a^2$$

となる。

(答) $m > 2 - 3a^2$

(2)

(1)の結果のもとで、接点 P, Q の x 座標を α, β とおくと

$$P(\alpha, \alpha^3 - 3a\alpha^2 + 2\alpha + 1), Q(\beta, \beta^3 - 3a\beta^2 + 2\beta + 1)$$

となるから、この 2 点の中点 R の座標は

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha^3 - 3a\alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^3 - 3a\beta^2 + 2\beta + 1}{2} \right)$$

となる。(1)の結果より、 α, β は 2 次方程式 $3x^2 - 6ax + 2 - m = 0$ の 2 実数解であることから、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = \frac{2 - m}{3}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= 8a^3 - 2a(2 - m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 4a^2 - 2 \cdot \frac{2 - m}{3} \end{aligned}$$

であることより、点 R の x 座標は

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = a$$

となり、 y 座標は

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha^3 - 3a\alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^3 - 3a\beta^2 + 2\beta + 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 8a^3 - 2a(2 - m) - 3a \left(4a^2 - 2 \cdot \frac{2 - m}{3} \right) + 2 \cdot 2a + 2 \right\} \\ &= -2a^3 + 2a + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) x 座標: a , y 座標: $-2a^3 + 2a + 1$