

【1】

〔解答〕

- (1) ア -3 イ 1 ウ $\frac{3}{2}$ エ 1 オ $\frac{13}{12}$
- (2) カ $\frac{16}{81}$ キ $\frac{32}{81}$ ク $\frac{8}{27}$ ケ $\frac{2}{27}$ コ $\frac{107}{81}$

〔解説〕

$$(1) \quad x^2 - 2ax + 3 - 2a = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

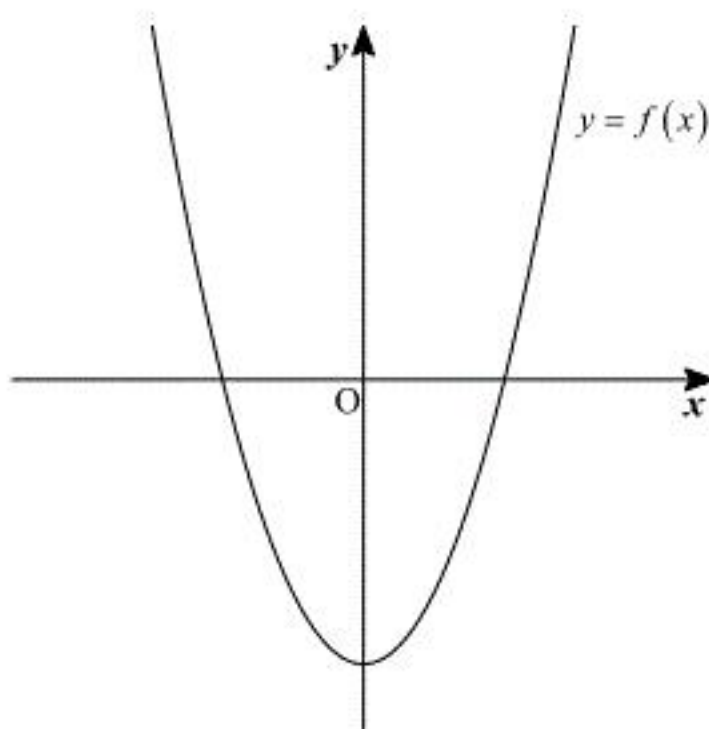
とおく。2 次方程式①の判別式を D とおくと、実数解をもつため、

$$\frac{D}{4} = a^2 - (3 - 2a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 3)(a - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq -3, 1 \leq a \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。

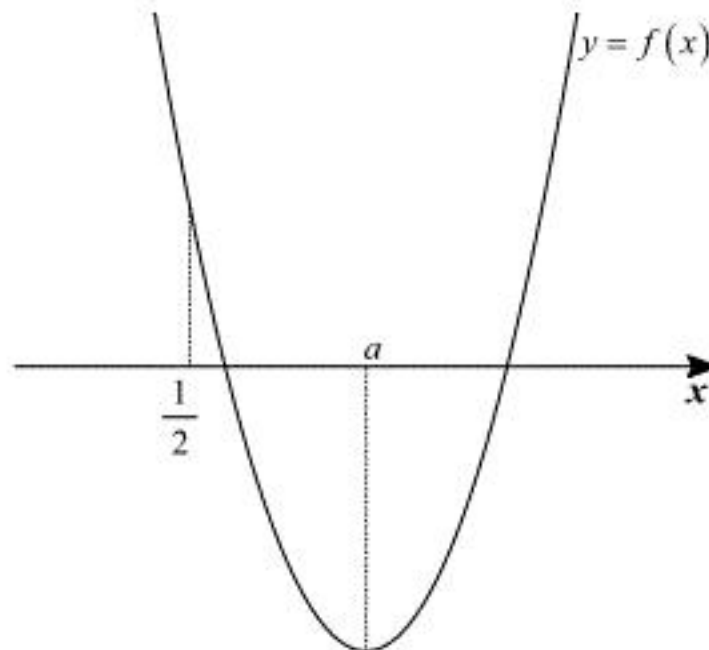


$f(x) = x^2 - 2ax + 3 - 2a$ とおく。①が正と負の解をもつとき、上のグラフより、

$$f(0) = 3 - 2a < 0$$

$$\therefore a > \frac{3}{2}$$

となる。



①が実数解をもち、しかもすべての実数解が $\frac{1}{2}$ 以上になるとき、上のグラフより、

$$\textcircled{2} \text{ かつ } f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \text{ かつ } a \geq \frac{1}{2}$$

となる。ここで、

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3a + \frac{13}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{13}{12}$$

であるから、求める a の値の範囲は、

$$1 \leq a \leq \frac{13}{12}$$

である。

(2)

$X = 4$ となるのは、4 以下の目が 4 回続けて出たときである。よって、この確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

となる。 $X = 2$ となるのは、4 以下の目が 3 回、5 以上の目が 1 回出るときである。この確率は、

$${}_4C_1 \left(\frac{2}{6}\right)^1 \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

となる。 $X = 0$ となるのは、4 以下の目が 2 回、5 以上の目が 2 回出るときである。この確率は、

$${}_4C_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

となる。 $X = -2$ となるのは、4 以下の目が 1 回、5 以上の目が 2 回出たあとに、5 以上の目がもう一度出たときである。この確率は、

$${}_3C_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^1 \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{27}$$

となる。 $X = -3$ となるのは、5 以上の目が 3 回続けて出たときである。よって、この確率は、

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

となる。よって、 X の 期待値は、

$$4 \cdot \frac{16}{81} + 2 \cdot \frac{32}{81} + 0 \cdot \frac{8}{27} + (-2) \cdot \frac{2}{27} + (-3) \cdot \frac{1}{27} = \frac{107}{81}$$

と求まる。

【2】

〔解答〕

$$\begin{array}{llll} (1) & \text{ア} & X^2-14X-1 & \text{イ} & 7+5\sqrt{2} & \text{ウ} & 7-5\sqrt{2} \\ & \text{エ} & \log_2(7+5\sqrt{2}) & \text{オ} & 3 & & \\ & & & & & & \\ (2) & \text{カ} & \frac{1}{3}\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{b} & \text{キ} & \frac{3}{4}\overrightarrow{a}+\frac{1}{4}\overrightarrow{b} & \text{ク} & \frac{1}{3}\overrightarrow{a} \\ & \text{ケ} & \frac{3}{10}\overrightarrow{a}+\frac{1}{10}\overrightarrow{b} & \text{コ} & \frac{\sqrt{211}}{30} & & \end{array}$$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} X &= 2^x \text{ とおくと,} \\ 2^x - 2^{-x} &= 14 \\ \Leftrightarrow X - X^{-1} &= 14 \\ \Leftrightarrow X^2 - 14X - 1 &= 0 \quad (\because X > 0) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$X = 7 \pm 5\sqrt{2}$$

であるが、 $X = 2^x > 0$ なので、

$$2^x = 7 + 5\sqrt{2}$$

となる。ゆえに、

$$x = \log_2(7 + 5\sqrt{2})$$

である。ここで、

$$2^3 < 14 < 7 + 5\sqrt{2} < 15 < 2^4$$

なので、

$$3 < x < 4$$

の範囲にあることがわかる。

(2)

点Gは△OABの重心なので、

$$\overrightarrow{\text{OG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$$

である。点Pは辺ABを1:3に内分するので、

$$\overrightarrow{\text{OP}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{b}$$

である。点Qは辺OAを1:2に内分するので、

$$\overrightarrow{\text{OQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a}$$

である。点Rは線分OP上にあるので、

$$\overrightarrow{\text{OR}} = t\overrightarrow{\text{OP}} = \frac{3}{4}t\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}t\overrightarrow{b} \quad (0 < t < 1)$$

と表せる。また、点Rは線分BQ上にあるので、

$$\overrightarrow{\text{OR}} = s\overrightarrow{\text{OQ}} + (1-s)\overrightarrow{\text{OB}} = \frac{s}{3}\overrightarrow{a} + (1-s)\overrightarrow{b} \quad (0 < s < 1)$$

と表せる。 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ は一次独立であるから、

$$\begin{cases} \frac{3}{4}t = \frac{s}{3} \\ \frac{1}{4}t = 1-s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{9}{10} \\ t = \frac{4}{10} \end{cases}$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{\text{OR}} = \frac{3}{10}\overrightarrow{a} + \frac{1}{10}\overrightarrow{b}$$

とわかる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{RG}} &= \overrightarrow{\text{OG}} - \overrightarrow{\text{OR}} \\ &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}\right) - \left(\frac{3}{10}\overrightarrow{a} + \frac{1}{10}\overrightarrow{b}\right) \\ &= \frac{1}{30}\overrightarrow{a} + \frac{7}{30}\overrightarrow{b} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{RG}}|^2 &= \left|\frac{1}{30}\overrightarrow{a} + \frac{7}{30}\overrightarrow{b}\right|^2 \\ &= \frac{1}{30^2} \left(|\overrightarrow{a}|^2 + 14\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 49|\overrightarrow{b}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{30^2} \left(1 + 14 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 49 \cdot 4 \right) \\ &= \frac{211}{30^2} \end{aligned}$$

である。ゆえに、

$$|\overrightarrow{\text{RG}}| = \frac{\sqrt{211}}{30}$$

と求まる。

[3]

(1)

$$f(x) = 2x^3 - 3(a+3)x^2 + 18ax$$

より,

$$f'(x) = 6x^2 - 6(a+3)x + 18a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = 6x^2 - 6(a+3)x + 18a$$

(2)

$$f'(x) = 6(x-a)(x-3)$$

である。 $a < 3$ より, 増減表を書くと以下のようなになる。

a	$\cdots$	a	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

以上より, $f(x)$ は, $x=a$ で極大となる。

$$(\text{答}) \quad x = a$$

(3)

題意より,

$$f(a) = 28$$

$$\Leftrightarrow -a^3 + 9a^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 9a^2 + 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a^2 - 7a - 14) = 0$$

$$\therefore a = 2, \frac{7 \pm \sqrt{105}}{2}$$

となる。 $a < 3$ であるため,

$$a = 2, \frac{7 - \sqrt{105}}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a = 2, \frac{7 - \sqrt{105}}{2}$$