

【1】

〔解答〕

$$(1) \quad \text{ア} \quad 2t^2+t-6 \quad \text{イ} \quad \frac{3}{2} \quad \quad \quad \text{ウ} \quad \frac{15}{4}$$

$$(2) \quad \text{エ} \quad -2 \quad \quad \quad \text{オ} \quad 2 \quad \quad \quad \text{カ} \quad \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2}\right) \quad \text{キ} \quad 2x^2$$

$$(3) \quad \text{ク} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ケ} \quad \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{コ} \quad \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

〔解説〕

(1)

$t=3^x-3^{-x}$ とおくと、

$$\begin{aligned} 2 \cdot 9^x + 3^x - 3^{-x} + 2 \cdot 9^{-x} &= 10 \\ \Leftrightarrow 2 \left\{ (3^x - 3^{-x})^2 + 2 \right\} + 3^x - 3^{-x} &= 10 \\ \Leftrightarrow 2(t^2 + 2) + t &= 10 \\ \Leftrightarrow 2t^2 + t - 6 &= 0 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} 2t^2 + t - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t-3)(t+2) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{3}{2} \quad (\because x > 0 \Rightarrow t = 3^x - 3^{-x} > 0) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} 9^x - 9^{-x} &= (3^x + 3^{-x})(3^x - 3^{-x}) \\ &= \sqrt{(3^x - 3^{-x})^2 + 4} \cdot (3^x - 3^{-x}) \\ &= t\sqrt{t^2 + 4} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

x の 2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= ax \\ \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 &= 0 \quad \quad \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

の判別式を D とおくと、①が 2 つの異なる実数解を持つには、

$$\begin{aligned} D &= a^2 - 4 > 0 \\ \therefore a &< -2, 2 < a \end{aligned}$$

となればよい。また、このとき①の異なる 2 つの実数解を α, β とすると、解と係数の関係により、

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = 1$$

であるから、線分 PQ の中点 M の座標は、

$$\begin{aligned} \text{M} \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{(\alpha + \beta)a}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \text{M} \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。よって、 $\text{M}(X, Y)$ とおくと、

$$Y = 2X^2$$

であるので、M は放物線 $y = 2x^2$ の上にある。

(3)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。また、

$$\begin{aligned} (E + aA)(E + bA) &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (E + aA)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

〔2〕

(1)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (3k^2 + 5k) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 5 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= n(n+1)(n+3) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = n(n+1)(n+3)$$

(2)

(1)より、 $n = 3m-1, 3m$ (m は自然数)に対して、 S_n は 3 の倍数であり、 $n = 3m-2$ に対して、

$$S_n = (3m-2)(3m-1)(3m+1)$$

となることから S_n は 3 の倍数ではない。よって、

$$\begin{cases} a_{2m-1} = 3m-1 \\ a_{2m} = 3m \end{cases}$$

となる。よって、

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 6$$

と求まる。また、

$$a_{100} = a_{2 \times 50} = 150$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 6, a_{100} = 150$$

(3)

$p=3$ のとき、

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2^{a_k}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{3k-1}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{3k}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{3}{7}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad T_n = \frac{3}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n \right\}, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{3}{7}$$

(4)

(1)より、 $n = 5m-3, 5m-1, 5m$ (m は自然数)に対して、 S_n は 5 の倍数である。また、

$n = 5m-4, 5m-2$ に対して、それぞれ

$$S_n = (5m-4)(5m-3)(5m+1)$$

$$S_n = (5m-2)(5m-1)(5m+3)$$

となることから S_n は 5 の倍数ではない。よって、

$$\begin{cases} a_{3m-2} = 5m-3 \\ a_{3m-1} = 5m-1 \\ a_{3m} = 5m \end{cases}$$

となる。したがって、

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 5, a_4 = 7$$

と求まる。また、

$$a_{100} = a_{3 \times 34 - 2} = 167$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 5, a_4 = 7, a_{100} = 167$$

[3]

(1)

点 O は $\triangle ABC$ の外接円の中心なので,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

となる。よって,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{2}{3} \pi = -\frac{1}{2},$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \frac{5}{6} \pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}| |\vec{a}| \cos \left(2 - \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \right) \pi = 0$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

(2)

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b})$$

である。よって,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= \frac{1}{9} |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{9} (|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{1}{3}$$

(3)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

である。よって,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OG}|^2 &= \frac{1}{9} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{9} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{OG}|^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{9}$$

(4)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{9} (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{9} (|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{3}}{18} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\triangle OPG$ の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OG}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG})^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{36} \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{18}, \triangle OPG \text{ の面積 } \frac{\sqrt{3}}{36}$$

〔4〕

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+4x^2}, \\ f'(x) &= \frac{1+4x^2-x \cdot 8x}{(1+4x^2)^2} \\ &= \frac{1-4x^2}{(1+4x^2)^2} \\ &= \frac{(1-2x)(1+2x)}{(1+4x^2)^2} \end{aligned}$$

となる。よって、増減表を書くと以下のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	(0)

以上より、

$$x = -\frac{1}{2} \text{ のとき、極小値 } -\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ のとき、極大値 } \frac{1}{4}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x = -\frac{1}{2} \text{ のとき極小値 } -\frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{2} \text{ のとき極大値 } \frac{1}{4}$$

(2)

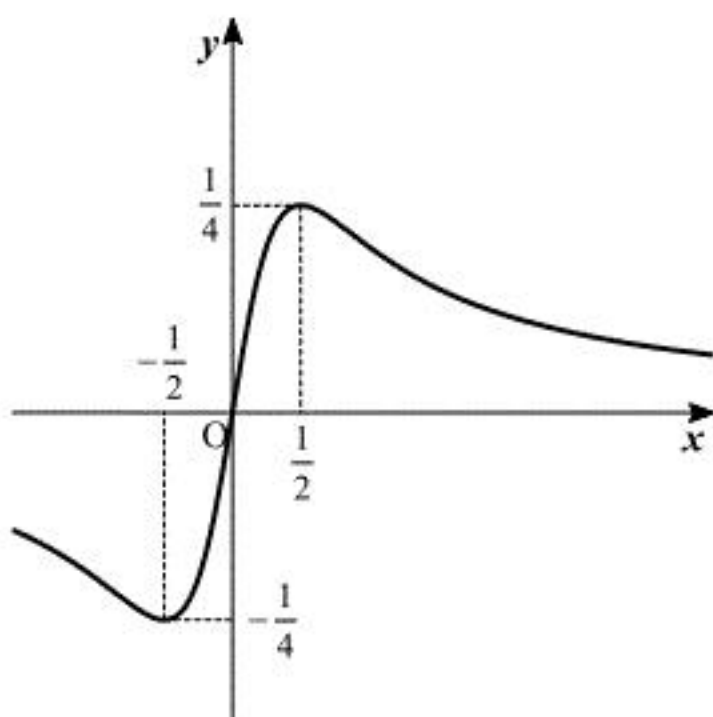
$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x}{1+4x^2} dx \\ &= \int \frac{1}{8} \cdot \frac{(1+4x^2)'}{1+4x^2} dx \\ &= \frac{1}{8} \log|1+4x^2| + C \\ &= \frac{1}{8} \log(1+4x^2) + C \quad (\because 1+4x^2 > 0) \end{aligned}$$

と求まる。 $(C : \text{積分定数})$

$$(\text{答}) \quad \int f(x) dx = \frac{1}{8} \log(1+4x^2) + C \quad (C : \text{積分定数})$$

(3)

(1)における増減表より、 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



上図より $x > 0$ において $0 < f(x) \leq \frac{1}{4}$ であるから、 $0 < \alpha < \beta$ より

$$f(\alpha) = f(\beta) = k \quad \left(0 < k < \frac{1}{4} \right)$$

とおくと、 α, β は x の 2 次方程式

$$\begin{aligned} f(x) &= k \\ \Leftrightarrow 4kx^2 - x + k &= 0 \end{aligned}$$

の異なる 2 つの実数解となる。よって、解と係数の関係より、

$$\alpha\beta = \frac{1}{4}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \alpha\beta = \frac{1}{4}$$

(4)

(3)より、

$$\alpha = \frac{1}{4\beta} \quad (\because \beta \neq 0)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{\frac{1}{4\beta}}^{\beta} f(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{8} \log(1+4x^2) \right]_{\frac{1}{4\beta}}^{\beta} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \log(1+4\beta^2) - \log \frac{1+4\beta^2}{4\beta^2} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \log(4\beta^2) \\ &= \frac{1}{4} (\log \beta + \log 2) \end{aligned}$$

となる。

(証明終)