

【1】

〔解答〕

$$(1) \quad \text{ア} \quad \frac{1}{12}a^2 - a \quad \text{イ} \quad -3 \quad \text{ウ} \quad 3$$

$$\text{エ} \quad -\frac{5}{2} \quad \text{オ} \quad \frac{145}{48}$$

$$(2) \quad \text{カ} \quad 216 \quad \text{キ} \quad \frac{1}{36} \quad \text{ク} \quad \frac{5}{9}$$

$$\text{ケ} \quad \frac{5}{12} \quad \text{コ} \quad \frac{5}{54}$$

〔解説〕

(1)

①の判別式を D とする。

重解を持つとき

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4(3a + 3b) &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{12}a^2 - a \end{aligned}$$

となる。

$$\frac{1}{12}a^2 - a = \frac{1}{12}(a-6)^2 - 3$$

であるので、 $a=6$ のとき b は最小値 -3 をとる。

このとき、①は

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$$

であるので、重解は $x=3$ である。

また、放物線 $y = x^2 - ax + 3a + 3b$ が x 軸と接する、つまり①式が重解を持つので、

$$b = \frac{1}{12}a^2 - a \quad \cdots \cdots \text{②}$$

となる。

また、放物線が直線 $y = x + 1$ とも接することより、

$$\begin{aligned} x^2 - ax + 3a + 3b &= x + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - (a+1)x + 3a + 3b - 1 &= 0 \end{aligned}$$

が重解を持つ。

よって、判別式を D_1 として、

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)^2 - 4(3a + 3b - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{12}a^2 - \frac{5}{6}a + \frac{5}{12} \quad \cdots \cdots \text{③} \end{aligned}$$

となる。

よって、②③より、

$$a = -\frac{5}{2}, b = \frac{145}{48}$$

となる。

(2)

3 個の目の出方は

$$6^3 = 216$$

通りである。

$a=b=c$ となる場合は、 $a=b=c=1, 2, \dots, 6$ の 6 通りである。

よって、求める確率は

$$\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

となる。

a, b, c が相異なる場合の数は、

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

通りである。

よって、求める確率は

$$\frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

となる。

a, b, c のうち、2 つが同じである場合の数は

$$216 - 6 - 120 = 90$$

通りである。

よって、求める確率は

$$\frac{90}{216} = \frac{5}{12}$$

である。

$a < b < c$ となる場合の数は、

$${}_6C_3 = 20$$

通りである。

よって、求める確率は

$$\frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	-6	イ	12	ウ	-6
	エ	10	オ	x		
(2)	カ	29	キ	$\frac{k(k-1)}{2}+1$	ク	$\frac{k(k+1)}{2}$
	ケ	15	コ	$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$		

〔解説〕

(1)

$$p(1)=1 \Leftrightarrow a+b+c=0$$

$$p(2)=2 \Leftrightarrow 4a+2b+c=-6$$

$$p(3)=3 \Leftrightarrow 9a+3b+c=-24$$

であり、これらを解くと

$$a=-6, b=12, c=-6$$

となる。

また

$$p(4)=64-96+48-6=10$$

より、剰余定理から、 $(x-4)$ で割ったときの余りは10である。

また、

$$p(x)=(x-1)(x-2)(x+3)+x$$

より、 $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは x である。

(2)

8 が最初に現れるのは、

$$\sum_{k=1}^7 k+1=29$$

より、第29項である。

k が最初に現れるのは

$$\sum_{i=1}^{k-1} i+1=\frac{k(k-1)}{2}+1$$

より、 $\frac{k(k-1)}{2}+1$ 項である。

最後に現れるのは

$$\sum_{i=1}^{k-1} i+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

より、 $\frac{k(k+1)}{2}$ 項である。

$$\begin{aligned} \frac{k(k-1)}{2}+1 &= 106 \\ \Leftrightarrow k &= 15 \end{aligned}$$

であるので、第106項で初めて、15が現れる。

初項から、 $\frac{k(k+1)}{2}$ 項までの和は、

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

となる。

[3]

(1)

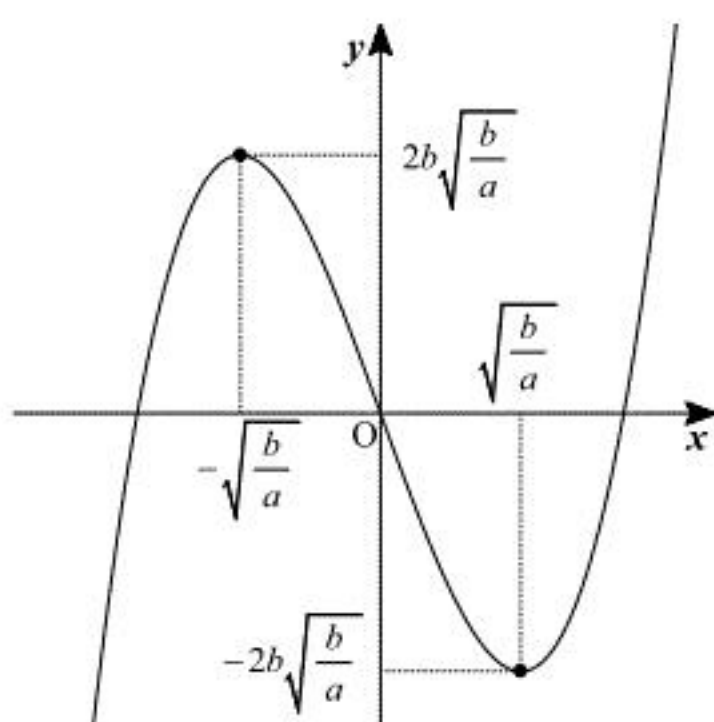
$$f'(x) = 3ax^2 - 3b = 3a \left(x + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \left(x - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$$

$a, b > 0$ であるから, $y = f(x)$ は $x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$ で極値をとる。

増減表は以下の通りである。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{b}{a}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{b}{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2b\sqrt{\frac{b}{a}}$	$\searrow$	$-2b\sqrt{\frac{b}{a}}$	$\nearrow$

$y = f(x)$ のグラフは, $f(-x) = f(x)$ であるから, 原点对称で下図のようになる。



よって, $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ のとき極小値 $-2b\sqrt{\frac{b}{a}}$ をとる。

(答) $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ のとき, 極小値 $-2b\sqrt{\frac{b}{a}}$

(2)

$x = t$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - a)$$

$$\therefore y = (3at^2 - 3b)x - 2at^3$$

これが $y = 6x - 2$ であるためには

$$3at^2 - 3b = 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-2at^3 = -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

であればよい。①, ②より

$$a = \frac{1}{t^3}, b = \frac{1}{t} - 2$$

これらより, t を消去すると

$$a = (b + 2)^3$$

となる。

(答) $a = (b + 2)^3$