

■ 数 学 問 題

15 : 00 ~ 16 : 30 (90分)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙(8ページ)、記述式解答用紙(あ)1枚、記述式解答用紙(い)1枚、記述式解答用紙(う)1枚、記述式解答用紙(え)1枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
なお、記述式解答用紙はセットになっています。監督者の指示に従って、解答用紙を破ったりしないよう注意して、ミシン目に沿って1枚ずつ切り離してください。
3. 試験中に試験用紙の印刷が不鮮明な箇所や汚れなどに気づいた場合は、監督者に申し出てください。
4. 監督者の指示に従って、4枚の記述式解答用紙の受験番号欄(それぞれ2カ所、合計8カ所)に受験番号を記入してください。
5. 解答はすべてHBの黒鉛筆またはHB・0.5mm以上の芯のシャープペンシルで記入してください。
6. 解答は、解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
7. 解答中でない解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
8. 受験中は不審な行動をとってはいけません。不正行為があれば全科目を無効とします。
9. 試験時間の途中で退場することはできません。
ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、監督者に申し出てください。
10. 試験終了のベルが鳴ると同時に解答をやめてください。
11. 問題用紙は試験終了後、持ち帰ってください。

各問題の解答は、解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること。

枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は、採点の対象にはならない。

[1]

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

(1) 正の数 x が、 $2 \cdot 9^x + 3^x - 3^{-x} + 2 \cdot 9^{-x} = 10$ を満たすとする。 $t = 3^x - 3^{-x}$ とおくと、 t は2次方程式 $= 0$ の解である。したがって、 $t =$ である。また、 $9^x - 9^{-x} =$ である。

(2) 放物線 $y = x^2 + 1$ と直線 $y = ax$ が異なる2点P, Qで交わるような実数 a の値の範囲は、

$$a < \text{エ}, \quad \text{オ} < a$$

である。線分PQの中点Mの座標を a で表すと となるから、Mは a の値によらず放物線 $y =$ の上にある。

(3) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、 $A^2 =$ である。また実数 a, b に対して、

$$(E + aA)(E + bA) = \text{ケ}, \quad (E + aA)^{-1} = \text{コ}$$

である。

[2]

自然数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 5k)$ とおく。自然数 p が与えられたとき、 S_n が p の倍数になるような n の値を小さい順に $a_1, a_2, a_3, \dots$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) S_n を n の式で表し、因数分解せよ。

(2) $p = 3$ のとき、 a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。また a_{100} を求めよ。

(3) $p = 3$ のとき、 $T_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2^{a_k}}$ を求めよ。また $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ。

(4) $p = 5$ のとき、 a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。また a_{100} を求めよ。

[3]

鋭角三角形 ABC の外接円の中心を O, 重心を G, 線分 AB を 2:1 に内分する点を P とする.

$$\angle AOB = \frac{2}{3}\pi, \quad \angle BOC = \frac{5}{6}\pi, \quad OA = 1$$

であるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{c} \cdot \vec{a}$ の値をそれぞれ求めよ.
- (2) $|\overrightarrow{OP}|^2$ の値を求めよ.
- (3) $|\overrightarrow{OG}|^2$ の値を求めよ.
- (4) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG}$ の値を求めよ. また, 三角形 OPG の面積を求めよ.

[4] 関数 $f(x) = \frac{x}{1+4x^2}$ について次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ.
- (2) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ.
- (3) $f(\alpha) = f(\beta)$ を満たす正の数を α, β ($0 < \alpha < \beta$) とするとき, $\alpha\beta$ の値を求めよ.
- (4) 上の(3)の条件を満たす α, β に対して, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{4}(\log \beta + \log 2)$ となることを示せ.

—— このページは白紙です。 ——