

【1】

【解答】

- (1) ア $-x^2+2x$ イ $-x^2-2x+2$
 ウ 3 エ $\frac{3}{4}$
 オ 1
 (2) カ $\frac{4}{35}$ キ $\frac{18}{35}$
 ク $\frac{12}{35}$ ケ $\frac{1}{35}$
 コ $\frac{16}{7}$

【解説】

(1)

$$f(x) = -x^2 + 2\left|x - \frac{1}{2}\right| + 1$$

であるので、 $f(x)$ は、 $x \geq \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= -x^2 + 2x \end{aligned}$$

と表せ、 $x \leq \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2\left(\frac{1}{2} - x\right) + 1 \\ &= -x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

と表せる。次に $f(x)$ の最大値を x の値で場合分けをして求める。

[1] $x \geq \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2x \\ &= -(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

であるから、このとき、 $f(x)$ は $x=1$ で最大値 1 をとる。

[2] $x \leq \frac{1}{2}$ のとき、

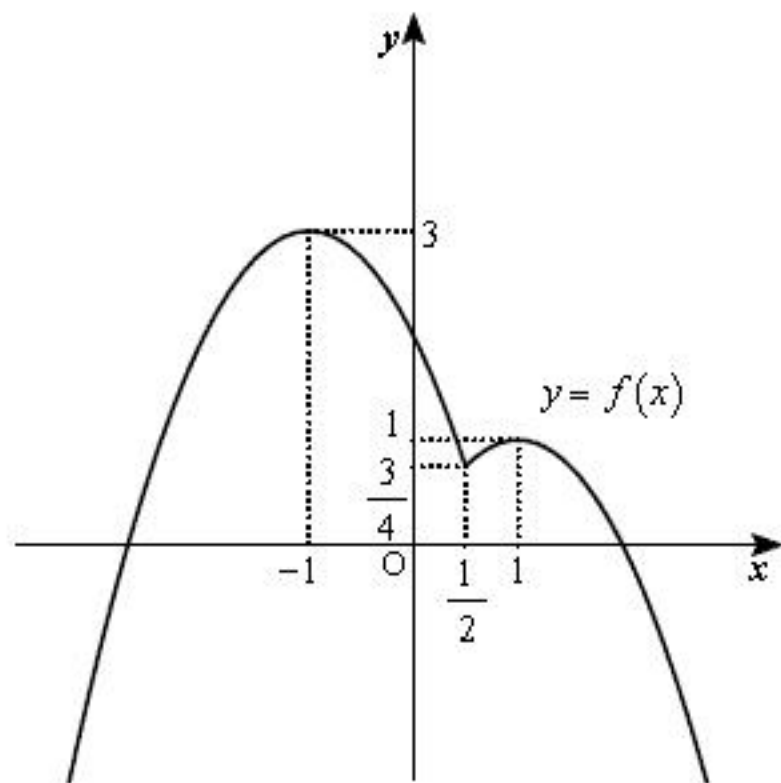
$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 - 2x + 2 \\ &= -(x+1)^2 + 3 \end{aligned}$$

であるから、このとき、 $f(x)$ は $x=-1$ で最大値 3 をとる。

[1], [2] より、 $f(x)$ は $x=-1$ で最大値 3 をとる。また、

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

であるから、 $y = f(x)$ のグラフの概形は下記のとおりである。



したがって、 $y = f(x)$ と $y = a$ の共有点が 4 個となるような a の範囲は、

$$\frac{3}{4} < a < 1$$

である。

(2)

7 個のうち 4 個の玉を同時に取り出すときの場合の数は、

$${}_7C_4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ [通り]}$$

である。また、取り出した 4 個の中の赤玉の個数を X とする。 $X=1$ となるのは、赤玉が 1 個白玉が 3 個含まれていればよいので、

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_3 = 4 \cdot 1 = 4 \text{ [通り]}$$

である。したがって、 $X=1$ となる確率は、

$$\frac{4}{35}$$

である。同様に考えて、 $X=2$ となる確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_2}{35} &= \frac{\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1}}{35} \\ &= \frac{6 \cdot 3}{35} \\ &= \frac{18}{35} \end{aligned}$$

であり、 $X=3$ となる確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_3 \cdot {}_3C_1}{35} &= \frac{\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3}{35} \\ &= \frac{4 \cdot 3}{35} \\ &= \frac{12}{35} \end{aligned}$$

であり、 $X=4$ となる確率は、

$$\frac{{}_4C_4}{35} = \frac{1}{35}$$

である。したがって、 X の期待値を $E(X)$ とすると、

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{4}{35} \cdot 1 + \frac{18}{35} \cdot 2 + \frac{12}{35} \cdot 3 + \frac{1}{35} \cdot 4 \\ &= \frac{80}{35} \\ &= \frac{16}{7} \end{aligned}$$

と求まる。

【2】

【解答】

$$(1) \quad \text{ア} \quad 2 \qquad \text{イ} \quad \frac{\pi}{3}$$

$$\text{ウ} \quad \frac{5}{12}\pi \qquad \text{エ} \quad \frac{\pi}{2}$$

$$\text{オ} \quad \frac{11}{6}\pi$$

$$(2) \quad \text{カ} \quad 5 \qquad \text{キ} \quad \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ク} \quad \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{ケ} \quad -\frac{1}{2}$$

$$\text{コ} \quad -\frac{4}{11}$$

【解説】

(1)

合成公式より,

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

であるから,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \leq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \dots \textcircled{1}' \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta < 2\pi \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} &\leq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi \qquad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であるから, ①', ②を満たす θ の範囲は,

$$\textcircled{1}' \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{9}{4}\pi$$

$$\therefore \frac{5}{12}\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{11}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{23}{12}\pi$$

と求まる。

(2)

$\overrightarrow{a} = (1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 3)$ であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= -1 + 6 \\ &= 5 \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}| &= \sqrt{1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{5} \\ |\overrightarrow{b}| &= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

であるから, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角度を θ とすると,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となるので, $0 \leq \theta < \pi$ より,

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

であることが分かる。次に $|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|$ の最小値を求める。 $|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|$ が最小となるとき, $|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2$

も最小となるので, $|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2$ の最小値とそのときの t の値を求める。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2 &= |\overrightarrow{a}|^2 + 2t\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + t^2|\overrightarrow{b}|^2 \\ &= 5 + 10t + 10t^2 \\ &= 10 \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

であるから, $|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2$ は $t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{5}{2}$ をとる。したがって, $|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|$ は $t = -\frac{1}{2}$ のと

き最小値 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ をとる。

$\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ が並行になるときの t の値を求める。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t+1 \\ 3t+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから, $\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ が並行となる条件は,

$$\begin{aligned} (-t+1) \cdot 2 - (3t+2) \cdot 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -11t-4 &= 0 \\ \therefore t &= -\frac{4}{11} \end{aligned}$$

と求まる。

【3】

(1)

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ とおくと,}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

であるから, ℓ_a の方程式は,

$$y = (3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a$$

$$= 3(a^2 - 1)x - 2a^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad y = 3(a^2 - 1)x - 2a^3$$

(2)

①式が $(1, b)$ を通ればよいので, ①式に $(1, b)$ を代入して,

$$b = 3(a^2 - 1) \cdot 1 - 2a^3$$

$$= -2a^3 + 3a^2 - 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad b = -2a^3 + 3a^2 - 3$$

(3)

②式に $b = -2$ を代入して整理すると,

$$2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$$

となる。曲線 C は三次関数なので, 上式の異なる実数解の個数が求める接線の本数であるから,

$$2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$$

$$(a - 1)(2a^2 - a - 1) = 0$$

$$(a - 1)^2(2a + 1) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, 1$$

となるので, 求める接線の本数は 2 本である。

(答) 2 本

(4)

②式の右辺を $g(a)$ とおく。 $y = g(a)$ と $y = b$ の交点の数が $y = f(x)$ の接線のうち $(1, b)$ を通るものの本数に等しいので, $y = g(a)$ と $y = b$ との共有点の数がちょうど 3 つとなるような b の範囲を求めればよい。

$$g'(a) = -6a^2 + 6a$$

$$= -6a(a - 1)$$

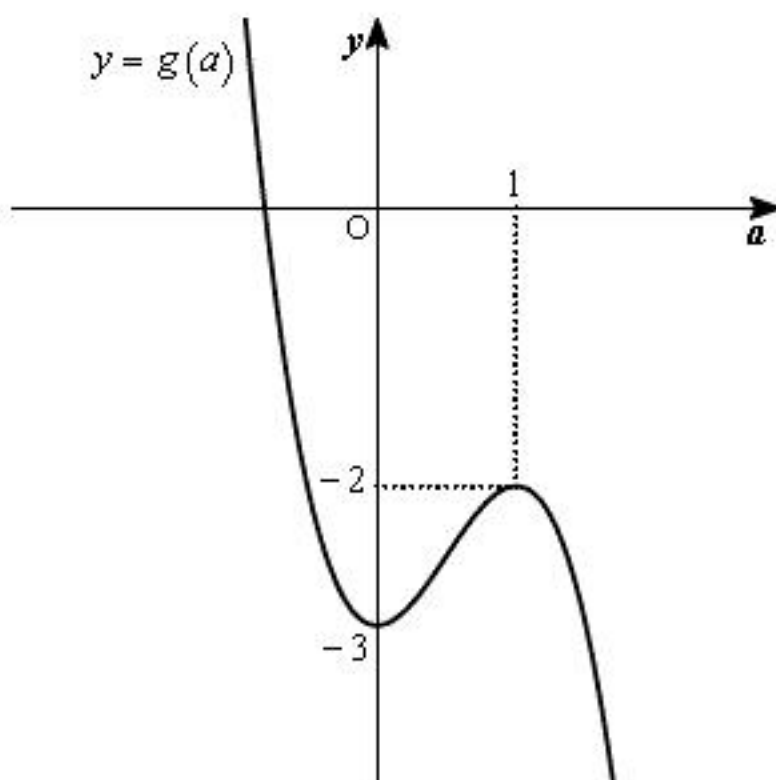
であるから, $g(a)$ の増減表は下記のとおりである。

a	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$
$g'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(a)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$g(0) = -3$$

$$g(1) = -2 + 3 - 3 = -2$$

より, $y = g(a)$ のグラフは下記のようなになる。



したがって, $y = g(a)$ と $y = b$ の共有点がちょうど 3 つとなるような b の範囲は,

$$-3 < b < -2$$

であるので, このとき, $y = f(x)$ の接線のうち, $(1, b)$ を通る接線の本数が 3 本となる。

$$(\text{答}) \quad -3 < b < -2$$