

【1】

ア	-9	カ	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$
イ	-3	キ	$\frac{1}{16}$
ウ	$-\frac{3}{4}$	ク	$\frac{1}{21}$
エ	$\log x$	ケ	$\frac{1}{12}$
オ	$\frac{-\log x+2}{x^2}$	コ	$\frac{5}{42}$

【解説】

(1)

$x=2+\sqrt{3}i$ を解に持つので、(*)に代入すると

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3}i)^3+p(2+\sqrt{3}i)+q&=0 \\ \Leftrightarrow (2p+q-10)+(9+p)\sqrt{3}i&=0\end{aligned}$$

となる。 $2p+q-10$ および $9+p$ は実数なので

$$\begin{aligned}9+p&=0 \\ \Leftrightarrow p&=-9\end{aligned}$$

となる。

また(*)2重解をもつとき、重解を α 、その他の解を β とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=0 \\ \alpha^2+2\alpha\beta=p \\ \alpha^2\beta=-q\end{cases}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}2\alpha+\beta&=0 \\ \Leftrightarrow \beta&=-2\alpha\end{aligned}$$

からその他の式に代入することで

$$\begin{cases}p=-3\alpha^2 \\ q=-2\alpha^3\end{cases}$$

が得られる。これを $p+q=-1$ に代入すると

$$\begin{aligned}-3\alpha^2-2\alpha^3&=-1 \\ \Leftrightarrow 2\alpha^3+3\alpha^2-1&=0 \\ \Leftrightarrow (\alpha-1)^2(2\alpha+1)&=0 \\ \Leftrightarrow \alpha&=1,-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。これらを $p=-3\alpha^2$ に代入することにより

$$p=-3,-\frac{3}{4}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}'&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\ &=\frac{1}{x}\cdot x+(\log x-1)\cdot 1 \\ &=\log x\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'&=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\ &=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x-1)\cdot 1}{x^2} \\ &=\frac{-\log x+2}{x^2}\end{aligned}$$

となる。

(3)

$\log_2(x-1)+\log_2(x-2)=2$ について考える。真数条件より

$$\begin{aligned}\begin{cases}x-1>0 \\ x-2>0\end{cases} \\ \Leftrightarrow x>2\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}\log_2(x-1)+\log_2(x-2)&=2 \\ \Leftrightarrow \log_2(x-1)(x-2)&=2 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-2)&=4 \\ \Leftrightarrow x^2-3x-2&=0 \\ \Leftrightarrow x&=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$

となる。 $x>2$ より求める解は $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ となる。

次に $(\log_2 x)^2+2\log x-8=0$ について考える。真数条件より $x>0$ となる。ここで $\log_2 x=X$ と

おくと

$$\begin{aligned}(\log_2 x)^2+2\log x-8&=0 \\ \Rightarrow X^2+2X-8&=0 \\ \Leftrightarrow (X+4)(X-2)&=0 \\ \Leftrightarrow X&=-4,2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x&=-4,2 \\ \Leftrightarrow x&=\frac{1}{16},4\end{aligned}$$

となる。これらは $x>0$ を満たす。このうち小さいほうの解は $\frac{1}{16}$ である。

(4)

すべての取り出し方は ${}_9C_3$ 通りである。偶数は 2, 4, 6, 8 の 4 枚入っているので、 a, b, c がすべて偶数である確率は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{1}{21}$$

となる。

また a, b, c が連続した数である場合は

$$(a, b, c)=(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 7), (6, 7, 8), (7, 8, 9), (8, 9, 10)$$

の 7 通りであるので、 a, b, c が連続した数である確率は

$$\frac{7}{{}_9C_3}=\frac{1}{12}$$

となる。

また、 $a=4$ となるためには 4 を引き、5~9 から 2 枚引けばよい。このような確率は

$$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_3}=\frac{5}{42}$$

となる。

[2]

(1)

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 4n^3 + 6n^2 - n - \{4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 12n^2 - 3 \end{aligned}$$

となる。 $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} S_1 &= 4 + 6 - 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

であり、 $12n^2 - 3$ に $n=1$ を代入しても 9 となるので、 $a_n = 12n^2 - 3$ は $n \geq 1$ で成り立つ。

(答) $a_n = 12n^2 - 3$

(2)

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} &= \sqrt{12(n+1)^2 - 3} - \sqrt{12n^2 - 3} \\ &= \sqrt{12n^2 + 24n + 9} - \sqrt{12n^2 - 3} \\ &= \frac{24n + 12}{\sqrt{12n^2 + 24n + 9} + \sqrt{12n^2 - 3}} \\ &= \frac{24 + \frac{12}{n}}{\sqrt{12 + \frac{24}{n} + \frac{9}{n^2}} + \sqrt{12 - \frac{3}{n^2}}} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} &= \frac{24}{\sqrt{12} + \sqrt{12}} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = 2\sqrt{3}$

(3)

$a_{2k} = 48k^2 - 3$ より

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n (48k^2 - 3) \\ &= 8n(n+1)(2n+1) - 3n \\ &= 16n^3 + 24n^2 + 5n \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{S_n} &= \frac{16n^3 + 24n^2 + 5n}{4n^3 + 6n^2 - n} \\ &= \frac{16 + \frac{24}{n} + \frac{5}{n^2}}{4 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}} \end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} = 4$$

となる。

(答) $T_n = 16n^3 + 24n^2 + 5n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} = 4$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_k} &= \frac{1}{12k^2 - 3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4k^2 - 1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{n}{6n+3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $U_n = \frac{n}{6n+3}$

〔3〕

(1)

$$\overrightarrow{BP} = (x, y-3, z)$$

$$\overrightarrow{CP} = (x-3, y-6, z)$$

より

$$2\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = 3(x-1, y-4, z)$$

となる。

$$(答) \quad 2\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = 3(x-1, y-4, z)$$

(2)

$$\overrightarrow{AP} = (x-5, y, z)$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot (2\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}) &= 3\{(x-5)(x-1) + y(y-4) + z^2\} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 + y^2 - 4y + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (2\sqrt{2})^2$$

となる。 $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (2\sqrt{2})^2$ は球面の方程式を表すので、P は球面上にあることが示せた。また、中心 Q: $(3, 2, 0)$ 、半径 $r = 2\sqrt{2}$ である。

$$(答) \quad Q: (3, 2, 0), \quad r = 2\sqrt{2}$$

(3)

$$\overrightarrow{AB} = (-5, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, 6, 0)$$

より $\triangle ABC$ は xy 平面上にあることが分かる。したがって面積を求めると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} |-5 \cdot 6 - 3(-2)| \\ &= 12\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S = 12$$

(4)

(3)より $\triangle ABC$ は xy 平面上にあるので、 $\triangle ABC$ を底面と見たとき四面体 PABC の高さは P の z 座標と等しくなる。ここで(2)より P の z 座標は

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 8 - (x-3)^2 - (y-2)^2$$

を満たす。したがって z は $x=3, y=2$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$ を取る。このとき四面体 PABC の体積 V は最大値

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{2} \\ &= 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

をとる。

$$(答) \quad 8\sqrt{2}$$

〔4〕

(1)

$$f(x) = \sin^2 x + 2 \sin x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos x$$

より

$$f'(\pi) = -2$$

となる。また

$$f(\pi) = 0$$

となるので、 ℓ の方程式は

$$y = -2(x - \pi)$$

$$= -2x + 2\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -2x + 2\pi$$

(2)

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos x$$

$$= 2 \cos x (\sin x + 1)$$

となるので、 $f'(x) = 0$ を満たす x は

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

となる。また

$$f''(x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 2 \sin x$$

$$= 2(1 - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x - 2 \sin x$$

$$= -2(2 \sin^2 x + \sin x - 1)$$

$$= -2(2 \sin x - 1)(\sin x + 1)$$

から $f''(x) = 0$ を満たす x は

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

となる。以上から増減表を描くと以下ようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	2π
$f'(x)$	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+
$f''(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+	0	+	+
$f(x)$	↗	↗	$\frac{5}{4}$	↗	3	↘	$\frac{5}{4}$	↘	-1	↗	↗

増減表より、極大値は $x = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

となる。また、極小値は $x = \frac{3\pi}{2}$ のとき

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{\pi}{2} \text{のとき極大値 } 3, \quad x = \frac{3\pi}{2} \text{のとき極小値 } -1$$

(3)

(2)の結果より、 C の凹凸は以下の表ようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	2π
$f'(x)$	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+
$f''(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+	0	+	+
$f(x)$	↗	↗	$\frac{5}{4}$	↗	3	↘	$\frac{5}{4}$	↘	-1	↗	↗

また増減表より、変曲点は $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ のときである。 $x = \frac{\pi}{6}$ のとき

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$$

となる。また、 $x = \frac{5\pi}{6}$ のとき

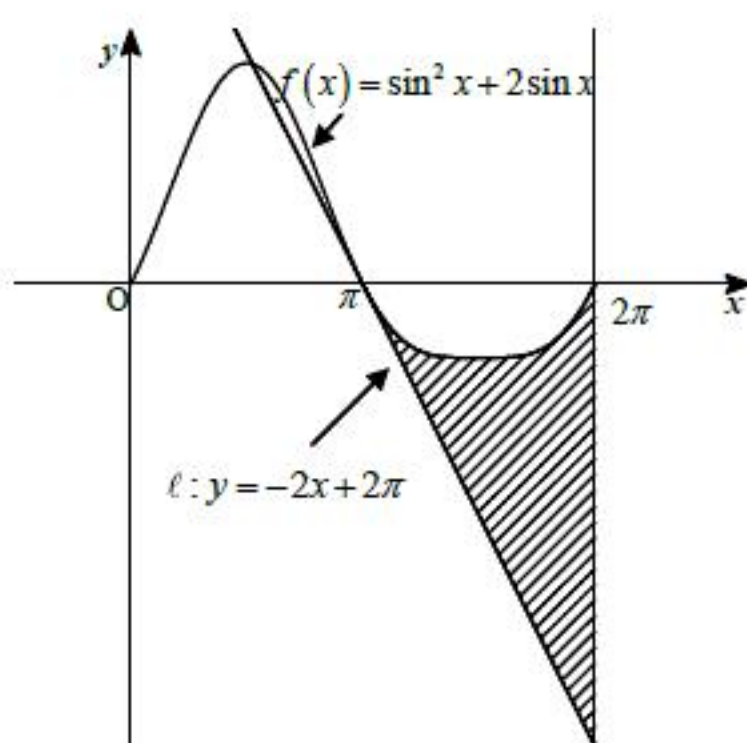
$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$$

となる。以上から変曲点の座標は $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{4}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad \text{凹凸は上表, 変曲点: } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{4}\right)$$

(4)

(2)(3)の結果から、求める面積を図示すると以下の図の斜線部となる。



したがって求める面積は

$$\int_{\pi}^{2\pi} \left\{ (\sin^2 x + 2 \sin x) - (-2x + 2\pi) \right\} dx = \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} + 2 \sin x + 2x - 2\pi \right) dx$$

$$= \left[\frac{x - \frac{1}{2} \sin 2x}{2} - 2 \cos x + x^2 - 2\pi x \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \pi^2 + \frac{\pi}{2} - 4$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi^2 + \frac{\pi}{2} - 4$$