

[1]

$$(1) \quad \text{ア} \quad \frac{9-\sqrt{17}}{2} \quad \text{イ} \quad \frac{9+\sqrt{17}}{2} \quad \text{ウ} \quad 4 \quad \text{エ} \quad \frac{9-\sqrt{17}}{2} \quad \text{オ} \quad 4$$

$$(2) \quad \text{カ} \quad 0 \quad \text{キ} \quad \frac{1}{28} \quad \text{ク} \quad \frac{3}{14} \quad \text{ケ} \quad \frac{3}{4} \quad \text{コ} \quad \frac{54}{7}$$

解説

(1)

$x^2-9x+16=0$ を解くと、 $x=\frac{9\pm\sqrt{17}}{2}$ であるから、①式より

$$\frac{9-\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{9+\sqrt{17}}{2} \quad \dots\dots ③$$

である。また、②式を変形すると

$$(x-4)(x+5) \geq 0$$

であるからこれを解いて

$$x \leq 4, \quad x \geq 5 \quad \dots\dots ④$$

である。

また、 x が短い辺の長さであることから

$$\begin{aligned} 4x &< 18 \\ \Leftrightarrow x &< \frac{9}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots ⑤$$

である。以上より③④⑤の共通範囲を求めて、

$$\frac{9-\sqrt{17}}{2} \leq x \leq 4$$

である。

(2)

X が最小となるのは1,2,...,6の玉を取り出したときで、よって最小値は6である。

よって $X=5$ となる確率は0である。

取り出し方は全部で、8個の玉から6個の玉を選ぶ場合の数であるから ${}_8C_6=28$ 通りである。

$X=6$ となるのは、7,8の玉を取り出さないときであるから、その確率は

$$\frac{{}_2C_2}{28} = \frac{1}{28}$$

である。 $X=7$ となるのは7を取り出し、かつ1~6の中から5個取り出す場合だからその確率は、

$$\frac{1 \cdot {}_6C_5}{28} = \frac{3}{14}$$

である。 $X=8$ となるのは8を取り出し、かつ1~7の中から5個取り出す場合だからその確率は、

$$\frac{1 \cdot {}_7C_5}{28} = \frac{3}{4}$$

である。以上より X の期待値は

$$6 \cdot \frac{1}{28} + 7 \cdot \frac{3}{14} + 8 \cdot \frac{3}{4} = \frac{54}{7}$$

である。

[2]

$$(1) \quad \text{ア} \quad t \quad \text{イ} \quad \frac{2}{t} \quad \text{ウ} \quad 4t+8-\frac{32}{t} \quad \text{エ} \quad 2 \quad \text{オ} \quad 9$$

$$(2) \quad \text{カ} \quad 0 \quad \text{キ} \quad \frac{8}{3} \quad \text{ク} \quad \frac{5}{3} \quad \text{ケ} \quad (1, 7, 1) \quad \text{コ} \quad 5$$

解説

(1)

$x > 1$ より $t > 0$ である。

$$\begin{aligned} \log_9 x^2 &= \frac{\log_3 x^2}{\log_3 9} \\ &= \frac{2 \log_3 x}{2} \\ &= \log_3 x \\ &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_x 9 &= \frac{\log_3 9}{\log_3 x} \\ &= \frac{2}{t} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} y &= \log_3 x - 16 \log_x 9 + 3 \log_9 x^2 + 8 \\ &= t - 16 \cdot \frac{2}{t} + 3t + 8 \\ &= 4t + 8 - \frac{32}{t} \end{aligned}$$

と表せる。 $t > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{t} (t^2 + 2t - 8) \\ &= \frac{4}{t} (t-2)(t+4) \end{aligned}$$

と変形でき、 $y \leq 0$ のとき、

$$0 < t \leq 2$$

となる。よって $0 < \log_3 x \leq 2$ であり底3は1より大きいので、

$$1 < x \leq 9$$

である。

(2)

$\overrightarrow{\text{OA}} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{\text{OB}} = (-1, 1, -1)$, $\overrightarrow{\text{OC}} = (1, 3, -3)$ であるから、

$$\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$$

である。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{CP}} &= \overrightarrow{\text{OP}} - \overrightarrow{\text{OC}} \\ &= s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s-t-1 \\ 2s+t-3 \\ s-t+3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、 $\overrightarrow{\text{CP}}$ と $\overrightarrow{\text{OB}}$ が直交するとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{CP}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3t - 5 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となり、 $\overrightarrow{\text{CP}}$ と $\overrightarrow{\text{OC}}$ が直交するとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{CP}} \cdot \overrightarrow{\text{OC}} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4s + 5t - 19 &= 0 \\ \therefore s &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OP}} &= \frac{8}{3} \overrightarrow{\text{OA}} + \frac{5}{3} \overrightarrow{\text{OB}} \\ &= \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AP}} &= \overrightarrow{\text{OP}} - \overrightarrow{\text{OA}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$|\overrightarrow{\text{AP}}| = 5$$

となる。

[3]

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x-3)(x+1) \end{aligned}$$

であるから、 $x \geq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$

以上より、 $f(x)$ は $x=3$ で最小値-27をとる。

(答) $x=3$ で最小値-27

(2)

(1)より、 $m=-27$ である。

$$g(x) = -9\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + k + \frac{81}{4}$$

より、 $x \geq 0$ において $g(x)$ は $x = \frac{3}{2}$ で最大値 $M = \frac{81}{4} + k$ をとる。よって、 $m \geq M$ となるよう

な k の値の範囲は

$$-27 \geq \frac{81}{4} + k$$

$$\Leftrightarrow k \leq -\frac{189}{4}$$

である。

(答) $k \leq -\frac{189}{4}$

(3)

すべての $x \geq 0$ において $f(x) \geq g(x)$ である為には、 $x \geq 0$ において $f(x) - g(x) \geq 0$ であればよい。 $f(x) - g(x) = h(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} h(x) &= x^3 + 6x^2 - 36x - k \\ h'(x) &= 3x^2 + 12x - 36 \\ &= 3(x-2)(x+6) \end{aligned}$$

であるから $x \geq 0$ における $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	2	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$	$-k$	$\searrow$	$-40-k$	$\nearrow$

よって $h(x)$ の最小値は $-40-k$ である。これが0以上であれば、 $x \geq 0$ において $f(x) - g(x) \geq 0$ となり題意が満たされる。よって求める k の範囲は

$$-40 - k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k \leq -40$$

である。

(答) $k \leq -40$