

[1]

$$(1) \quad \text{ア} \quad -1 \quad \text{イ} \quad \frac{3k-1}{2k} \quad \text{ウ} \quad \frac{k-1}{4k} \quad \text{エ} \quad -\frac{(5k-1)^2}{8k} \quad \text{オ} \quad -\frac{1}{5}$$

$$(2) \quad \text{カ} \quad 720 \quad \text{キ} \quad 48 \quad \text{ク} \quad 240 \quad \text{ケ} \quad 288 \quad \text{コ} \quad 144$$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2kx^2 + (1-k)x - 3k + 1 \\ &= (x+1)(2kx-3k+1) \end{aligned}$$

より、 $f(x)=0$ の解は

$$x = -1, \frac{3k-1}{2k}$$

である。また

$$\begin{aligned} f(x) &= 2k \left(x + \frac{1-k}{4k} \right)^2 - 2k \left(\frac{1-k}{4k} \right)^2 - 3k + 1 \\ &= 2k \left(x + \frac{1-k}{4k} \right)^2 - \frac{(5k-1)^2}{8k} \end{aligned}$$

であるから、 $k < 0$ より $f(x)$ は $x = \frac{k-1}{4k}$ のとき最大値 $-\frac{(5k-1)^2}{8k}$ をとる。最大値が $\frac{5}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} -\frac{(5k-1)^2}{8k} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow 25k^2 + 10k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5k+1)^2 &= 0 \\ \therefore k &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

である。これは $k < 0$ を満たす。

(2)

6文字をすべて一列に並べるとき、その並べ方は

$$6! = 720 \quad [\text{通り}]$$

ある。小文字2個を左端に並べるとき、小文字2個と大文字4個の並べ方を考えると

$$2! \times 4! = 48 \quad [\text{通り}]$$

あることがわかる。小文字2個を連続して並べるとき、小文字2個を1個の文字として考えると

$$5! \times 2! = 240 \quad [\text{通り}]$$

あることがわかる。両端が大文字となるとき、その並べ方は

$${}_4P_2 \times 4! = 288 \quad [\text{通り}]$$

ある。このうち小文字が2個連続しない並べ方は、まず4個の大文字の並べ方を考え、3か所できるすき間のうち2か所に小文字を入れることを考えると、

$$4! \times {}_3P_2 = 144 \quad [\text{通り}]$$

ある。

[2]

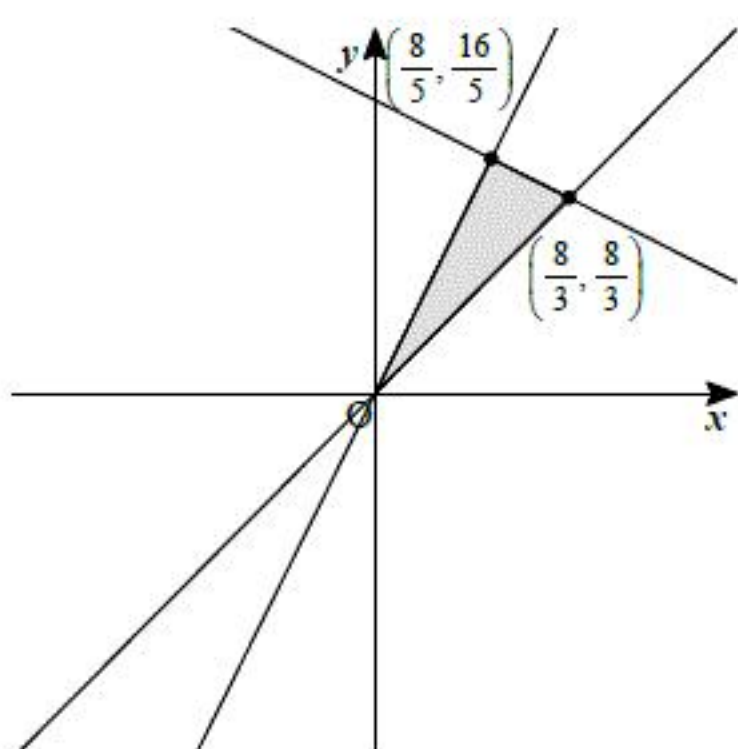
$$(1) \quad \text{ア} \quad 8 \quad \text{イ} \quad 0 \quad \text{ウ} \quad 0 \quad \text{エ} \quad -\frac{12}{5} \quad \text{オ} \quad \frac{128}{9}$$

$$(2) \quad \text{カ} \quad 4 \quad \text{キ} \quad 9 \quad \text{ク} \quad \frac{9}{32} \quad \text{ケ} \quad \frac{7}{16} \quad \text{コ} \quad \frac{9}{14}$$

【解説】

(1)

$y \leq 2x$, $x+2y \leq 8$, $x-y \leq 0$ となる領域は下図の斜線部で、境界も含む。



$2x+y=k$ とおくと $y=-2x+k$ である。 k が最大となるのは $y=-2x+k$ が $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ を通るときで、このとき $k=8$ である。 k が最小となるのは $y=-2x+k$ が $(0,0)$ を通るときで、このとき $k=0$ である。 $\frac{1}{2}x-y=l$ とおくと $y=\frac{1}{2}x-l$ である。 l が最大となるのは $y=\frac{1}{2}x-l$ が $(0,0)$ を通るときで、 $l=0$ である。 l が最小となるのは $y=\frac{1}{2}x-l$ が $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ を通るときで、 $l=-\frac{12}{5}$ である。 x^2+y^2 が最大となるのは $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ を通るときで、最大値は $\frac{128}{9}$ である。

(2)

$$\overrightarrow{p} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{MP} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{p} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{MP} \right) \\ &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{a}|^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{MP} \end{aligned}$$

である。ここで $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{MP}$ より $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{p} &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{a}|^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。同様にして

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{p} &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{b}|^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

も求まる。 $\overrightarrow{p} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$ とおくと、 $\frac{1}{2}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{p} = 4$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overrightarrow{a} \cdot (\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}) &= 4 \\ \Leftrightarrow 2\alpha + \beta &= 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $\frac{1}{2}\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{p} = 9$ より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overrightarrow{b} \cdot (\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}) &= 9 \\ \Leftrightarrow 4\alpha + 18\beta &= 9 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①と②を連立して解くと

$$\alpha = \frac{9}{32}, \beta = \frac{7}{16}$$

とわかる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{9}{32}\overrightarrow{a} + \frac{7}{16}\overrightarrow{b} \\ &= \frac{23}{32} \cdot \frac{9\overrightarrow{a} + 14\overrightarrow{b}}{14+9} \end{aligned}$$

と表せ、 $AQ:QB=14:9=1:\frac{9}{14}$ と求まる。

[3]

(1)

[1] $x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} x|x-1| &= x(1-x) \\ &= -x^2 + x \end{aligned}$$

である。このとき

$$\begin{aligned} -x^2 + x &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x-(1-a)\} &= 0 \\ \therefore x &= 0, 1-a \quad (\because 0 < 1-a < 1) \end{aligned}$$

となるので、 $y = x|1-x|$ と $y = ax$ の原点以外の交点の x 座標の 1 つは $x = 1-a$ である。

[2] $x \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} x|x-1| &= x(x-1) \\ &= x^2 - x \end{aligned}$$

である。このとき

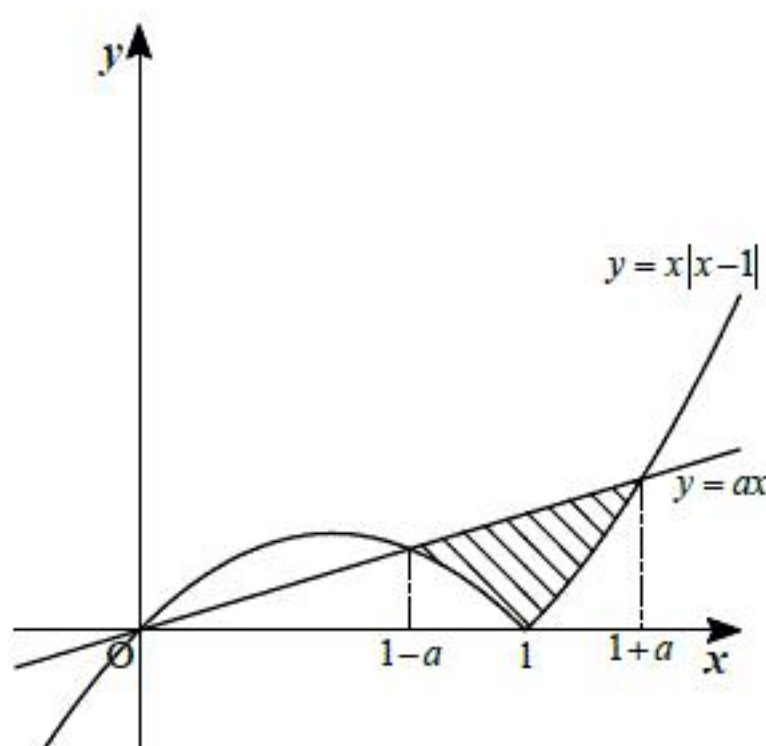
$$\begin{aligned} x^2 - x &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x-(1+a)\} &= 0 \\ \therefore x &= 1+a \quad (\because x \geq 1, 1 < 1+a < 2) \end{aligned}$$

となるので、 $y = x|1-x|$ と $y = ax$ の原点以外の交点の x 座標の 1 つは $x = 1+a$ である。

[1], [2] より $\alpha = 1-a, \beta = 1+a$ と求まる。

(答) $\alpha = 1-a, \beta = 1+a$

(2)



上図より

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ax - x|x-1|\} dx \\ &= \int_{1-a}^1 \{ax + x(x-1)\} dx + \int_1^{1+a} \{ax - x(x-1)\} dx \\ &= \int_{1-a}^1 \{x^2 - (1-a)x\} dx + \int_1^{1+a} \{-x^2 + (1+a)x\} dx \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad S = \int_{1-a}^1 \{x^2 - (1-a)x\} dx + \int_1^{1+a} \{-x^2 + (1+a)x\} dx$$

(3)

$$\begin{aligned} S &= \int_{1-a}^1 \{x^2 - (1-a)x\} dx + \int_1^{1+a} \{-x^2 + (1+a)x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(1-a)x^2 \right]_{1-a}^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(1+a)x^2 \right]_1^{1+a} \\ &= \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1-a) \right\} - \left\{ \frac{1}{3}(1-a)^3 - \frac{1}{2}(1-a)^3 \right\} \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{3}(1+a)^3 + \frac{1}{2}(1+a)^3 \right\} - \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1+a) \right\} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

である。

(答) $S = a^2$