

〔1〕

- (1) ア 120°
 イ 45°
 ウ $-1+\sqrt{3}$
 エ $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$
 オ $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$
- (2) カ 36
 キ $\frac{5}{18}$
 ク $\frac{5}{9}$
 ケ $\frac{1}{6}$
 コ $\frac{8}{9}$

【解説】

(1)

$\triangle ABC$ は半径 $\sqrt{2}$ の円に内接するので、正弦定理より、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6}}{\sin A} &= 2 \times \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sin A &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow A &= 120^\circ \quad (\because A > 90^\circ)\end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sin B} &= 2 \times \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sin B &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

となり、 $A > 90^\circ$ より $B < 90^\circ$ であるので、

$$B = 45^\circ$$

となる。また、 $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos A \\ \Leftrightarrow AB^2 + 2AB - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow AB &= -1 + \sqrt{3} \quad (\because AB > 0)\end{aligned}$$

となる。再び正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{AB}{\sin C} &= 2 \times \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sin C &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\end{aligned}$$

である。よって、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

となる。

(2)

取り出す2個の玉の組み合わせの総数は、

$${}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

である。また、 $X=0$ のとき、取り出す2個の玉はどちらも奇数であるので、その確率は、

$$\frac{{}_5C_2}{36} = \frac{5}{18} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $X=1$ のとき、偶数の玉を1つ、奇数の玉を1つ取り出すので、その確率は、

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_5C_1}{36} = \frac{5}{9} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、 $X=2$ のとき、取り出す2個の玉はどちらも偶数であるので、その確率は、

$$\frac{{}_4C_2}{36} = \frac{1}{6} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より X の期待値は、

$$0 \times \frac{5}{18} + 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{8}{9}$$

である。

〔2〕

- (1) ア $-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
イ 1
ウ -2
エ -2
オ 4
カ 3
キ 5
ク 8
ケ 15
コ $\frac{n(15n+1)}{2}$

【解説】

(1)

まず、

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4} \\ &= -\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ \omega^3 &= \omega \times \omega^2 \\ &= -\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \times \left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right) \\ &= -\frac{3i^2-1}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。また、(i)より、

$$\begin{aligned}f(\sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2}+2a+\sqrt{2}b+c &= 0 \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

である。次に、(ii)より、

$$\begin{aligned}f(\omega) &= \omega^3+a\omega^2+b\omega+c \\ &= 1-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}a+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}b+c \\ &= \left(1-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+c\right)+(-a+b)\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

となり、これが実数であるので、

$$\begin{aligned}-a+b &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= b \quad \cdots \text{②}\end{aligned}$$

が成り立つ。②を①に代入すると、

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{2})a+c &= -2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}a+(2a+c) &= -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。ここで、 a, b, c は整数なので、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \sqrt{2}a = -2\sqrt{2} \\ 2a+c = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = 4 \end{cases}\end{aligned}$$

となり、②より、

$$b = -2$$

となる。

(2)

まず、

$$\begin{cases} a_n = p+(n-1)q \\ b_n = q+(n-1)p \end{cases}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\begin{cases} a_2 = p+q = 8 \\ b_4 = q+3p = 14 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{cases} a_n = 5n-2 \\ b_n = 3n+2 \end{cases}$$

となる。ここで、 a_n と b_n の項を $n=1$ から順番に数えると、

$$c_1 = 8$$

となる。また、 a_n と b_n の n の係数に注目して、3と5の最小公倍数は15であるので、公差は15となる。したがって、

$$c_n = 15n-7$$

である。よって、 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、

$$\frac{n(8+15n-7)}{2} = \frac{n(15n+1)}{2}$$

である。

[3]

(1)

$$f(x) = x^3 + 2x$$

と置く。 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

となる。したがって点 $(a, f(a))$ における曲線 C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= (3a^2 + 2)(x-a) + a^3 + 2a \\ &= (3a^2 + 2)x - 2a^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad y = (3a^2 + 2)x - 2a^3$$

(2)

(1)の結果より曲線 C の異なる接点における接線は互いに異なる。接点が $(a, f(a))$ である曲線 C の接線が点 $P(2, 8)$ を通るための条件は

$$\begin{aligned} 8 &= 2(3a^2 + 2) - 2a^3 \\ \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。したがって曲線 C の接線が3本存在するための条件は①を満たす a が3つ存在することである。①を解くと

$$\begin{aligned} a^3 - 3a^2 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a^2 - 2a - 2) &= 0 \\ \therefore a &= 1, 1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

となり、①を満たす a は3つ存在する。したがって曲線 C の接線は3本存在する。また $r < s < t$ より

$$r = 1 - \sqrt{3}, s = 1, t = 1 + \sqrt{3}$$

となる。

$$(答) \quad r = 1 - \sqrt{3}, s = 1, t = 1 + \sqrt{3}$$

(3)

a を0でない実数とする。求める放物線と x 軸の交点の x 座標が $1 \pm \sqrt{3}$ であることより、求める放物線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= a\{x - (1 - \sqrt{3})\}\{x - (1 + \sqrt{3})\} \\ &= a(x^2 - 2x - 2) \end{aligned}$$

と置ける。ここで求める放物線が点 $(1, 3)$ を通ることより

$$\begin{aligned} 3 &= a(1 - 2 - 2) \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

となる。したがって求める放物線の方程式は

$$y = -x^2 + 2x + 2$$

となる。

$$(答) \quad y = -x^2 + 2x + 2$$