

【1】

〔解答〕

- |     |   |               |   |                  |   |                               |
|-----|---|---------------|---|------------------|---|-------------------------------|
| (1) | ア | $2t^2+3t-2$   | イ | $\frac{\pi}{6}$  | ウ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ |
| (2) | エ | $-6$          | オ | $-\frac{22}{25}$ |   |                               |
| (3) | カ | $2q$          | キ | $2pq$            |   |                               |
| (4) | ク | $\frac{7}{8}$ | ケ | $\frac{5}{108}$  | コ | $\frac{49}{54}$               |

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\cos 2x-3 \sin x+1 &=0 \\ \Leftrightarrow-2 \sin ^2 x-3 \sin x+2 &=0\end{aligned}$$

よって、 $\sin x=t$  とすると

$$2 t^2+3 t-2=0$$

となる。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  であるので、 $0 \leq t \leq 1$  である。

$$\begin{aligned}2 t^2+3 t-2 &=0 \\ \Leftrightarrow(2 t-1)(t+2) &=0\end{aligned}$$

より、

$$t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

である。このとき、

$$2 x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

となるので、半角公式より

$$\sin ^2 \frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos \frac{\pi}{6}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

となる。よって、

$$\sin \frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

となる。

(2)

$$z^2+w^2=-3+4 i-3-4 i=-6$$

また、 $zw=5$  である。

$$\frac{w}{z^2}+\frac{z}{w^2}=\frac{(z+w)\left(z^2-z w+w^2\right)}{(z w)^2}=-\frac{22}{25}$$

となる。

(3)

$$\frac{f(a+2 h)-f(a)}{h}=2 \cdot \frac{f(a+2 h)-f(a)}{2 h}$$

であるので、

$$\lim _{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2 h)-f(a)}{h}=2 f'(a)=2 q$$

となる。また、

$$\frac{\{f(a+h)\}^2-\{f(a)\}^2}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot(f(a+h)+f(a))$$

であるので、

$$\lim _{h \rightarrow 0} \frac{\{f(a+h)\}^2-\{f(a)\}^2}{h}=f'(a) \cdot 2 f(a)=2 p q$$

となる。

(4)

1 個も偶数が出ない確率を考える。つまりすべて奇数であるので、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

である。よって、求める確率は

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

である。目の出方は全部で  $6^3=216$  通りある。3 個の目の和が 6 である組み合わせは以下の 3 通り。

$$(1,1,4),(1,2,3),(2,2,2)$$

よって、目の出方は

$$3+6+1=10$$

通りある。よって、求める確率は

$$\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$$

となる。また、3 個の目の和が 6 以下である組み合わせは以下の 7 通り。

$$(1,1,4),(1,2,3),(2,2,2),(2,2,1),(1,1,3),(1,1,2),(1,1,1)$$

よって、目の出方は

$$4 \times 3+1 \times 6+2 \times 1=20$$

通りある。よって、求める確率は

$$1-\frac{20}{216}=\frac{49}{54}$$

となる。

[2]

(1)

$$\begin{aligned}x^2 - (2p+4)x + y^2 + 2p^2y + p^4 - p^3 + 7p^2 - 5p &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-p-2)^2 + (y+p^2)^2 &= p^3 - 6p^2 + 9p + 4\end{aligned}$$

となるので、中心の座標は

$$(X, Y) = (p+2, -p^2)$$

となる。 $p = X-2$ より、求める軌跡は

$$y = -(x-2)^2$$

となる。ただし、 $p > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}x-2 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &> 2\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \ y = -(x-2)^2 \ (x > 2)$$

(2)

$f(p) = p^3 - 6p^2 + 9p + 4$ とする。

$$f'(p) = 3p^2 - 12p + 9 = 3(p-1)(p-3)$$

であるので、増減表は以下のようになる。

|         |   |   |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| $p$     | 0 |   | 1 |   | 3 |   |
| $f'(p)$ |   | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(p)$  | 4 | ↗ |   | ↘ | 4 | ↗ |

よって、最小値は $p=3$ のとき4である。ゆえに、最小の半径は2となる。

$$(\text{答}) \ p=3 \text{のとき半径} 2$$

(3)

$p=3$ のとき円Cは、中心が $(5, -9)$ 、半径は2となる。よって、円Cの中心と直線OAとの距離は、

$$\frac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot (-9)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{51}{5}$$

となる。ここで、点Bと直線OAとの距離を $d$ とすると、

$$\frac{51}{5} - 2 \leq d \leq \frac{51}{5} + 2$$

となる。よって、

$$S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \text{OA}$$

であるから、

$$\frac{41}{2} \leq S \leq \frac{61}{2}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \ \frac{41}{2} \leq S \leq \frac{61}{2}$$

[3]

$$s\overline{OA}+t\overline{OB}+u\overline{OC}=\overline{0} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

(1)

$$\overline{OD}=-\frac{s}{t+u}\overline{OA} \text{ より}$$

$$\overline{OA}=-\frac{t+u}{s}\overline{OD}$$

である。これを①に代入すると

$$-s\cdot\frac{t+u}{s}\overline{OD}+t\overline{OB}+u\overline{OC}=\overline{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OD}=\frac{t\overline{OB}+u\overline{OC}}{u+t}$$

となる。ここで  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  の係数の和を取ると

$$\frac{t}{u+t}+\frac{u}{u+t}=1$$

となるので点 D は辺 BC 上に存在する。また

$$\overline{OD}=\frac{t\overline{OB}+u\overline{OC}}{u+t}$$

より

$$BD:DC=u:t$$

となる。

(答)  $BD:DC=u:t$

(2)

$$|\overline{OA}|=|\overline{OB}|=|\overline{OC}| \text{ より}$$

$$|\overline{OD}|=|\overline{OE}|=|\overline{OF}|$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{t+u}|\overline{OA}|=\frac{t}{s+u}|\overline{OB}|=\frac{u}{s+t}|\overline{OC}|$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{t+u}=\frac{t}{s+u}=\frac{u}{s+t}$$

となる。ここで

$$\frac{s}{t+u}=\frac{t}{s+u}=\frac{u}{s+t}=a$$

と置くと

$$s=a(t+u) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

$$t=a(s+u) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

$$u=a(s+t) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{4}$$

と置ける。②+③+④より

$$s+t+u=2a(s+t+u)$$

$$\therefore a=\frac{1}{2} (\because s+t+u>0)$$

となる。③を②に代入すると

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}u\right)+\frac{1}{2}u$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}s=\frac{3}{4}u$$

$$\Leftrightarrow s=u$$

となる。同様に③に④を代入すると

$$t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t\right)+\frac{1}{2}s$$

$$\Leftrightarrow s=t$$

となる。したがって以上より

$$s=t=u$$

となる。

(証明終)

(3)

①に  $s=t=u>0$  を代入すると

$$s(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})=\overline{0}$$

$$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$$

となる。これより

$$\overline{OA}=-\left(\overline{OB}+\overline{OC}\right)$$

となる。したがって  $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|=|\overline{OC}|=r$  より

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{BC} &= -\left(\overline{OB}+\overline{OC}\right) \cdot \left(\overline{OC}-\overline{OB}\right) \\ &= |\overline{OB}|^2 - |\overline{OC}|^2 \\ &= r^2 - r^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\overline{OB} \cdot \overline{CA}=0, \overline{OC} \cdot \overline{AB}=0$$

が示される。したがって

$$\overline{OD}=-\frac{1}{2}\overline{OA}, \overline{OE}=-\frac{1}{2}\overline{OB}, \overline{OF}=-\frac{1}{2}\overline{OC}$$

より

$$\overline{OD} \cdot \overline{BC}=0, \overline{OE} \cdot \overline{CA}=0, \overline{OF} \cdot \overline{AB}=0$$

となる。これと

$$|\overline{OD}|=|\overline{OE}|=|\overline{OF}|=\frac{r}{2}$$

より  $\triangle ABC$  の内接円の中心は O でありその半径は  $\frac{r}{2}$  である。一方  $\triangle ABC$  の外接円の中心は

O でありその半径は  $r$  である。よって  $\overline{OD} \cdot \overline{BC}=0$  より  $\angle ODB=90^\circ$  であることとあわせると

$$\begin{aligned} BD &= \frac{\sqrt{3}}{2} OB \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} r \end{aligned}$$

となる。  $s=t=u$  と (1) の結果より  $BD:DC=1:1$  であるので

$$BC=2BD=\sqrt{3}r$$

である。他の辺についても同様にして

$$AB=AC=\sqrt{3}r$$

となることが分かる。したがって  $\triangle ABC$  は 1 辺の長さが  $\sqrt{3}r$  の正三角形である。したがってその面積は

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}r\right)^2\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

となる。

(答)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$

〔4〕

(1)

$f(x)=\sqrt{x}(x-6)$  を変形して、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x}(x-6) \\ &= x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

として、 $x$  で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{x}}(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{4x\sqrt{x}}(x+2) \end{aligned}$$

である。よって増減表は下のようになる。

|          |                                                                                     |                                                                                     |              |                                                                                     |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $x$      | 0                                                                                   | ...                                                                                 | 2            | ...                                                                                 |
| $f'(x)$  |  | -                                                                                   | 0            | +                                                                                   |
| $f''(x)$ |  | +                                                                                   | +            | +                                                                                   |
| $f(x)$   | 0                                                                                   |  | $-4\sqrt{2}$ |  |

したがって、 $x=2$  で極小値  $f(2)=-4\sqrt{2}$  をとる。また、 $x>0$  において  $f(x)$  は下に凸である。

(答)  $x=2$  で極小値  $f(2)=-4\sqrt{2}$  ,  $x>0$  において  $f(x)$  は下に凸

(2)

曲線  $C$  上の点  $(p, f(p))$  における接線は、

$$y=f'(p)(x-p)+f(p)$$

と書けるので(1)より、

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2\sqrt{p}}(p-2)(x-p)+\sqrt{p}(p-6) \\ &= \frac{3}{2\sqrt{p}}(p-2)x - \frac{1}{2}\sqrt{p}(p+6) \end{aligned}$$

である。よって、 $y$  軸との交点の  $y$  座標は  $-\frac{1}{2}\sqrt{p}(p+6)$  である。

(答)  $-\frac{1}{2}\sqrt{p}(p+6)$

(3)

接線  $l$  は(2)で求めた接線、点  $A$  は(2)で求めた  $y$  軸との交点に他ならない。したがって、

$$-10 = -\frac{1}{2}\sqrt{p}(p+6)$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} -10 &= -\frac{1}{2}\sqrt{p}(p+6) \\ \Leftrightarrow 20 &= \sqrt{p}(p+6) \end{aligned}$$

とし、両辺2乗して、

$$\begin{aligned} p(p+6)^2 &= 400 \\ \Leftrightarrow (p-4)(p^2+16p+100) &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $p$  は  $p>0$  の実数であることより、

$$p=4$$

である。これを(2)で求めた接線の方程式に代入すると、

$$y = \frac{3}{2}x - 10$$

である。

(答)  $y = \frac{3}{2}x - 10$

(4)

接線  $l$  を  $y=g(x)$  とおく。 $f(x)$  と  $g(x)$  の交点は(3)より、

$$(4, -4)$$

である。 $f(x)$  は  $x>0$  において下に凸であるから、 $f(x) \geq g(x)$  である。求める面積  $S$  は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^4 \left\{ \sqrt{x}(x-6) - \left( \frac{3}{2}x - 10 \right) \right\} dx \\ &= \int_0^4 \left( x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x + 10 \right) dx \\ &= \left[ \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 6 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + 10x \right]_0^4 \\ &= \frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} - 4 \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 \\ &= \frac{44}{5} \end{aligned}$$

である。

(答)  $S = \frac{44}{5}$