

【1】

【解答】

ア $4\sqrt{3}$ イ 4 ウ 1 エ 3 オ $-\frac{1}{7}$
 カ 120 キ 60 ク 0 ケ 40 コ 80

【解説】

(1)

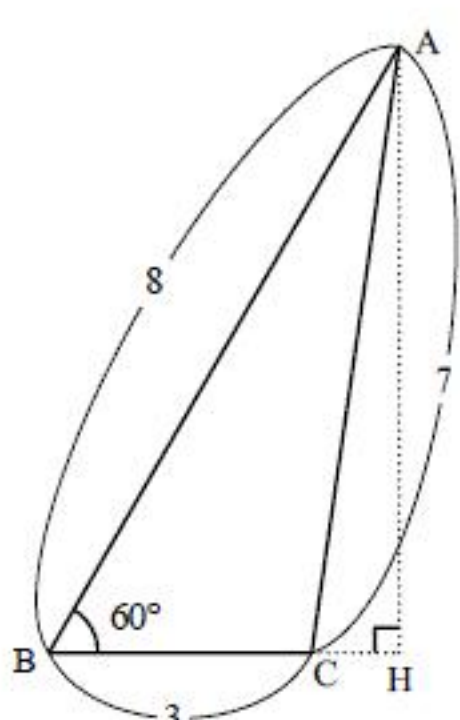
$$\begin{aligned}AH &= 8 \cdot \sin 60^\circ \\&= 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\&= 4\sqrt{3} \\BH &= 8 \cdot \cos 60^\circ \\&= 8 \cdot \frac{1}{2} \\&= 4\end{aligned}$$

である。 $BC = x$ とおくと、 $\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned}7^2 &= 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \\&\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \\&\Leftrightarrow (x-3)(x-5) = 0 \\&\therefore x = 3, 5\end{aligned}$$

と求まる。

[1] $BC = 3$ のとき、

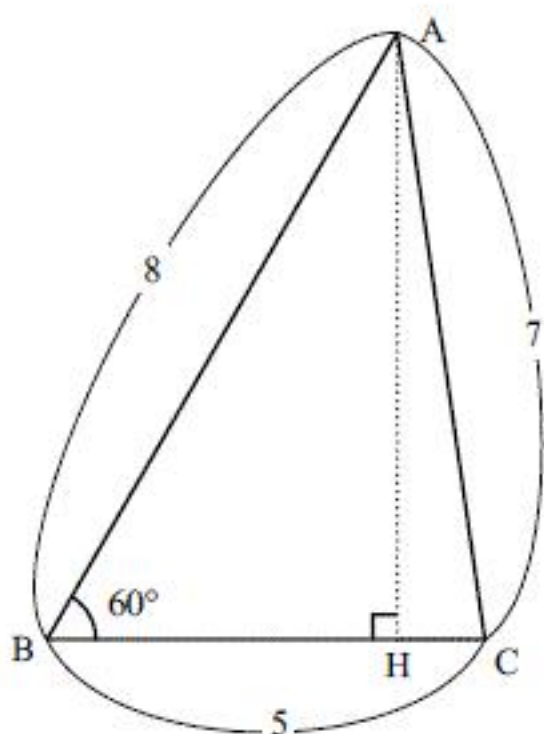


このとき、上図のようになるので、

$$\begin{aligned}CH &= BH - BC \\&= 4 - 3 \\&= 1\end{aligned}$$

と求まる。

[2] $BC = 5$ のとき、



このとき、上図のようになるので、

$$\begin{aligned}CH &= BC - BH \\&= 5 - 4 \\&= 1\end{aligned}$$

と求まる。

[1], [2]より、

$$CH = 1$$

である。 $C > 90^\circ$ のとき、 [1], [2]より、

$$BC = 3$$

である。したがって、このとき $\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} \\&= \frac{9 + 49 - 64}{42} \\&= -\frac{6}{42} \\&= -\frac{1}{7}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

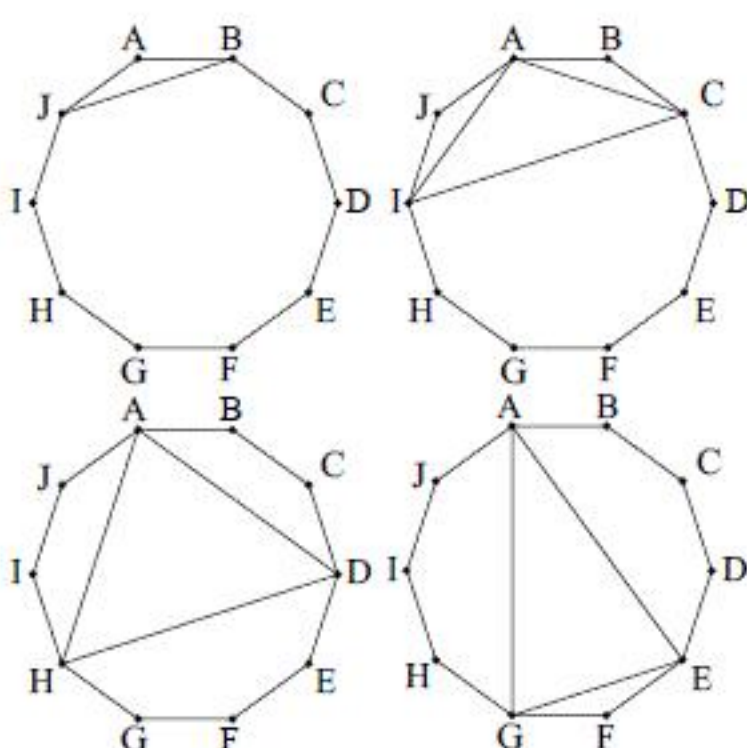
正十角形の 10 個の頂点のうち 3 個を頂点とする三角形の個数は、

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ [個]}$$

である。正 10 角形と 1 辺だけ共有する三角形は、正 10 角形の 1 辺を選び、その 1 辺の両端 2 点と 1 辺の両隣の 2 点の合計 4 点を除く 6 個の頂点のうち 1 つを選んで三角形を作れば良いので、

$${}_{10}C_1 \cdot {}_6C_1 = 60 \text{ [個]}$$

である。



上図より、点 A と残りの 9 点を選んで三角形を作るとき、4 種類の異なった頂角となる二等辺三角形を作ることができるが、どれも正三角形ではない。したがって、10 個の頂点のうち 3 個を頂点とする正三角形の個数は、0 個である。また、二等辺三角形の個数は、4 種類の異なった頂角となる二等辺三角形が作れることから、他の点に関しても同様に考えて、

$$4 \cdot 10 = 40 \text{ [個]}$$

作れる。以上より、3 辺の長さが相異なる三角形は、

$$120 - 40 = 80 \text{ [個]}$$

である。

【2】

【解答】

$$\text{ア} \quad 2u^2-1 \qquad \text{イ} \quad 4u^3-3u$$

$$\text{ウ} \quad 4u^3-2u^2-2u \qquad \text{エ} \quad \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{オ} \quad \frac{\pi}{4} \qquad \text{カ} \quad 4$$

$$\text{キ} \quad 6 \qquad \text{ク} \quad 9$$

$$\text{ケ} \quad q^2+q \qquad \text{コ} \quad q^2$$

【解説】

(1)

$u = \cos x$ とおくと、

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 2u^2 - 1 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(x+2x) \\ &= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= u(2u^2-1) - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2u^3 - u - 2(1-\cos^2 x)\cos x \\ &= 2u^3 - u - 2(1-u^2)u \\ &= 4u^3 - 3u \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} y &= \cos 3x - \cos 2x + \cos x - 1 \\ &= (4u^3 - 3u) - (2u^2 - 1) + u - 1 \\ &= 4u^3 - 2u^2 - 2u \end{aligned}$$

と表せる。 $y=0$ のとき、

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ \Leftrightarrow 4u^3 - 2u^2 - 2u &= 0 \\ \Leftrightarrow 2u(2u^2 - u - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2u(2u+1)(u-1) &= 0 \\ \therefore u &= -\frac{1}{2}, 0, 1 \end{aligned}$$

である。 $0 \leq x \leq \pi$ であるから、

$$\begin{aligned} \cos x &= -\frac{1}{2}, 0, 1 \\ \therefore x &= 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

と求まる。また、

$$\begin{aligned} \cos 3x - \cos 2x + \cos x - 1 &< -1 \\ \Leftrightarrow 4u^3 - 2u^2 - 2u + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow (2u-1)(2u^2-1) &< 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2}u+1)(2u-1)(\sqrt{2}u-1) &< 0 \\ \therefore u &< -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} < u < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

であるが、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $0 \leq u \leq 1$ であるから、

$$\therefore \frac{1}{2} < u < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

と求まる。以上より、このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &< \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \frac{\pi}{4} &< x < \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

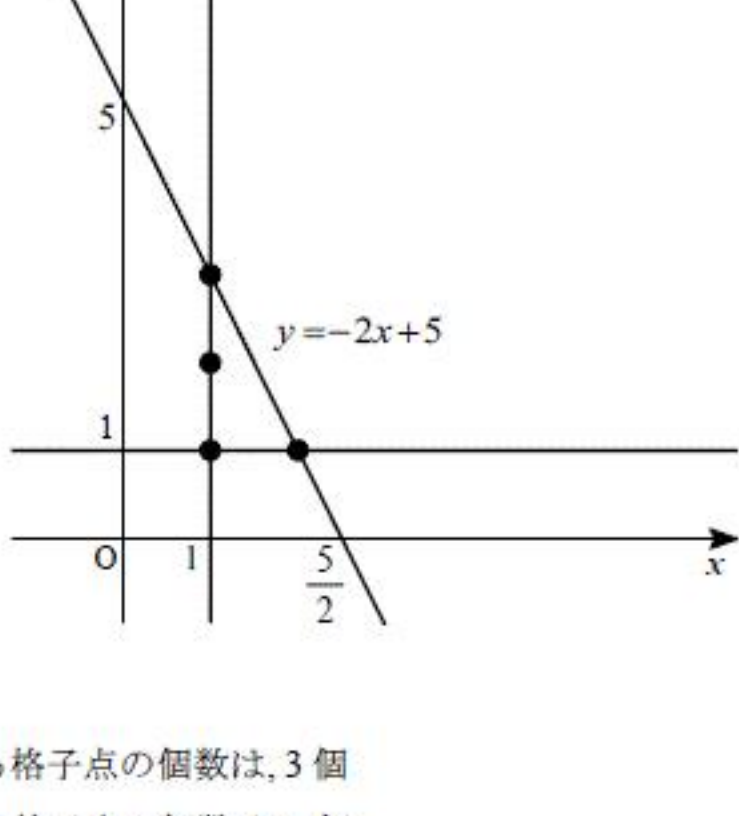
である。

(2)

$n=3$ のとき、 s, t はともに自然数であるから、 a_3 は、

$$y = -2x + 5, x=1, y=1$$

で囲まれてできる三角形の内部または辺上の格子点の個数に等しい。



上図より、

$$\begin{aligned} x=1 \text{ 上にある格子点の個数は、} &3 \text{ 個} \\ x=2 \text{ 上にある格子点の個数は、} &1 \text{ 個} \end{aligned}$$

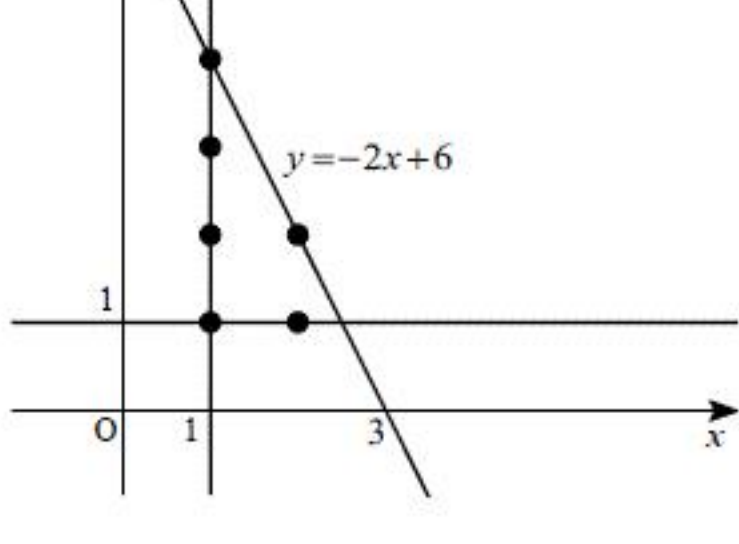
であるから、

$$a_3 = 4 \text{ [個]}$$

である。 $n=4$ のとき、 a_4 は、

$$y = -2x + 6, x=1, y=1$$

で囲まれてできる三角形の内部または辺上の格子点の個数に等しい。



上図より、

$$\begin{aligned} x=1 \text{ 上にある格子点の個数は、} &4 \text{ 個} \\ x=2 \text{ 上にある格子点の個数は、} &2 \text{ 個} \end{aligned}$$

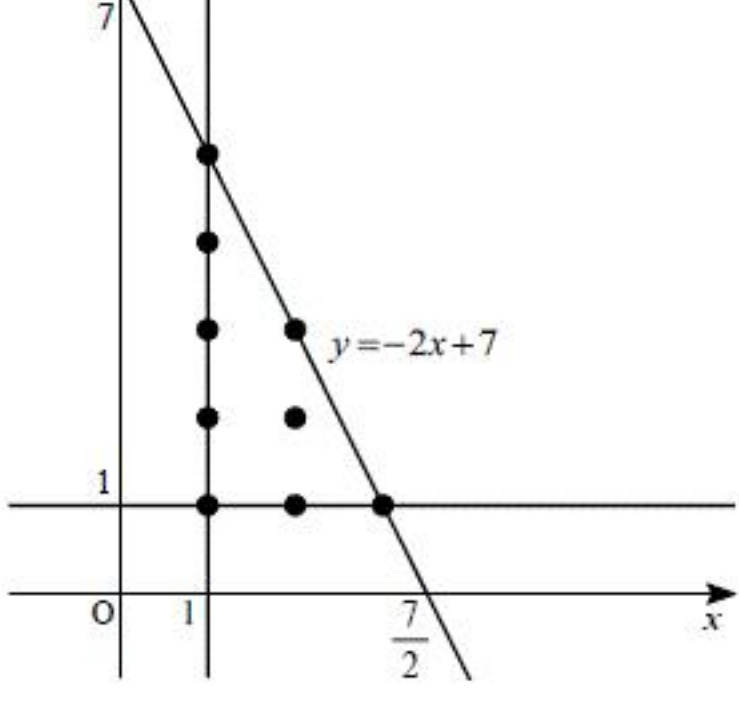
であるから、

$$a_4 = 6 \text{ [個]}$$

である。 $n=5$ のとき、 s, t はともに自然数であるから、 a_5 は、

$$y = -2x + 7, x=1, y=1$$

で囲まれてできる三角形の内部または辺上の格子点の個数に等しい。



上図より、

$$\begin{aligned} x=1 \text{ 上にある格子点の個数は、} &5 \text{ 個} \\ x=2 \text{ 上にある格子点の個数は、} &3 \text{ 個} \\ x=3 \text{ 上にある格子点の個数は、} &1 \text{ 個} \end{aligned}$$

であるから、

$$a_5 = 9 \text{ [個]}$$

である。 $n=2q$ のとき、 a_q は、

$$y = -2x + 2q + 2, x=1, y=1$$

で囲まれてできる三角形の内部または辺上の格子点の個数に等しい。この三角形を S_{2q} とおく。

$y = -2x + 2q + 2$ と $y=1$ の交点は、

$$\begin{aligned} 1 &= -2x + 2q + 2 \\ \Leftrightarrow 2x &= 2q + 1 \\ \therefore x &= \frac{2q+1}{2} \end{aligned}$$

と求まるので、 k を自然数とすると、 $x=k$ と S_{2q} が交点をもつとき、

$$1 \leq k \leq \frac{2q+1}{2}$$

であるが、 k は自然数であるから、

$$1 \leq k \leq q$$

である。 $x=k$ と $y = -2x + 2q + 2$ の交点は、

$$y = -2k + 2q + 2$$

より、

$$(k, -2k + 2q + 2)$$

であるから、 S_{2q} の内部または辺上の格子点のうち、 $x=k$ 上の格子点の個数は、

$$-2k + 2q + 2 \text{ [個]}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} a_{2q} &= \sum_{k=1}^q (-2k + 2q + 2) \\ &= -q(q+1) + (2q+2)q \\ &= -q^2 - q + 2q^2 + 2q \\ &= q^2 + q \end{aligned}$$

と求まる。 $n=2q-1$ のとき、

$$y = -2x + 2q + 1, x=1, y=1$$

で囲まれてできる三角形の内部または辺上の格子点の個数に等しい。この三角形を S_{2q-1} とおく。

$y = -2x + 2q + 1$ と $y=1$ の交点は、

$$\begin{aligned} 1 &= -2x + 2q + 1 \\ x &= q \end{aligned}$$

と求まるので、 k を自然数とすると、 $x=k$ と S_{2q-1} が交点をもつとき、

$$1 \leq k \leq q$$

である。 $x=k$ と $y = -2x + 2q + 1$ の交点は、

$$y = -2k + 2q + 1$$

より、

$$(k, -2k + 2q + 1)$$

であるから、 S_{2q-1} の内部または辺上の格子点のうち、 $x=k$ 上の格子点の個数は、

$$-2k + 2q + 1 \text{ [個]}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} a_{2q-1} &= \sum_{k=1}^q (-2k + 2q + 1) \\ &= -q(q+1) + (2q+1)q \\ &= -q^2 - q + 2q^2 + q \\ &= q^2 \end{aligned}$$

と求まる。

[3]

(1)

直線 $y=x$ 、曲線 C_t の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned}x^2 + (1-2t)x + t^2 &= x \\ \Leftrightarrow x^2 - 2tx + t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-t)^2 &= 0\end{aligned}$$

となり、これは重解をもつ。したがって直線 $y=x$ は曲線 C_t の接線である。

(証明終)

(2)

曲線 C_s 、曲線 C_t の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned}x^2 + (1-2t)x + t^2 &= x^2 + (1-2s)x + s^2 \\ \Leftrightarrow 2(t-s)x &= (t-s)(t+s)\end{aligned}$$

となる。ここで $s \neq t$ より $t-s \neq 0$ であるので

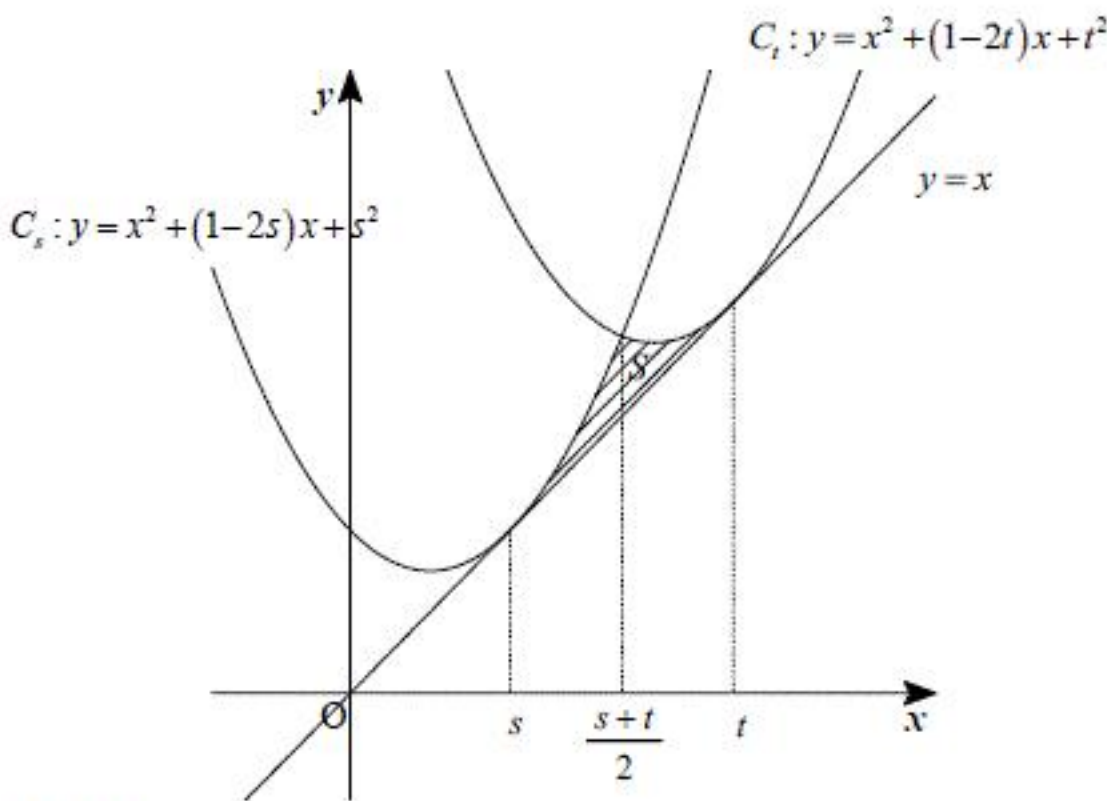
$$\begin{aligned}2(t-s)x &= (t-s)(t+s) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{s+t}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって曲線 C_s 、曲線 C_t の交点の x 座標は $\frac{s+t}{2}$ である。

(答) $\frac{s+t}{2}$

(3)

(1)の結果より直線 $y=x$ と曲線 C_t は $x=t$ において接する。同様に直線 $y=x$ と曲線 C_s は $x=s$ において接する。したがって S は下図斜線部の領域の面積となる。



したがって上図より

$$\begin{aligned}S &= \int_s^{\frac{s+t}{2}} \{x^2 + (1-2s)x + s^2 - x\} dx + \int_{\frac{s+t}{2}}^t \{x^2 + (1-2t)x + t^2 - x\} dx \\ &= \int_s^{\frac{s+t}{2}} (x^2 - 2sx + s^2) dx + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (x^2 - 2tx + t^2) dx \\ &= \int_s^{\frac{s+t}{2}} (x-s)^2 dx + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (x-t)^2 dx\end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \int_s^{\frac{s+t}{2}} (x-s)^2 dx + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (x-t)^2 dx$

(4)

(3)の結果より

$$\begin{aligned}S &= \int_s^{\frac{s+t}{2}} (x-s)^2 dx + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (x-t)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-s)^3 \right]_s^{\frac{s+t}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-t)^3 \right]_{\frac{s+t}{2}}^t \\ &= \frac{(t-s)^3}{24} - \frac{(s-t)^3}{24} \\ &= \frac{(t-s)^3}{12}\end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{(t-s)^3}{12}$