

【1】

【解答】

(1)	ア	$\frac{3(2k^2-1)}{2}$
	イ	$2(k^2-1)$
	ウ	-1
	エ	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
	オ	1
	カ	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(2)	キ	$\frac{1}{20}$
	ク	$\frac{3}{10}$
	ケ	$\frac{3}{10}$
	コ	$\frac{3}{10}$
	サ	7

【解説】

(1) x, y についての連立1次方程式

$$2x-3ky=3, x-ky=k^2+\frac{1}{2} \ (k \neq 0)$$

を解いて、

$$x=\frac{3(2k^2-1)}{2}, y=\frac{2(k^2-1)}{k}$$

を得る。この解が $x > 0, y > 0$ を満たすとき

$$\begin{aligned} &x > 0 \\ &\Leftrightarrow 2k^2-1 > 0 \\ &\Leftrightarrow k > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ または } k < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cdots \textcircled{1} \\ &y > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{k^2-1}{k} > 0 \\ &\Leftrightarrow k^2 > 1, k > 0 \text{ または } k^2 < 1, k < 0 \\ &\Leftrightarrow k > 1 \text{ または } -1 < k < 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①②から k の取り得る値の範囲は

$$-1 < k < -\frac{\sqrt{2}}{2}, k > 1$$

となる。また、この解が $x < 0, y > 0$ を満たすとき

$$\begin{aligned} &x < 0 \\ &\Leftrightarrow 2k^2-1 < 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < k < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。②③から k の取り得る値の範囲は

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < k < 0$$

となる。

(2)

6枚のカードから3枚のカードを取り出す場合の数は ${}_6C_3=20$ 通りある。 $X=5$ である場合の数は、 $(1, 2, 2)$ のカードを引くときだから ${}_1C_1 \cdot {}_2C_2=1$ 通り、 $X=9$ である場合の数は、

$(3, 3, 3)$ のカードを引くときだから ${}_3C_3=1$ 通りとなる。よって、確率は $\frac{1}{20}$ となる。 $X=6$ で

ある場合の数は、 $(1, 2, 3)$ のカードを引くときだから ${}_1C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_3C_1=6$ 通りとなり、確率は

$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ となる。 $X=7$ である場合の数は、 $(2, 2, 3), (1, 3, 3)$ のカードを引くときだから

${}_2C_2 \cdot {}_3C_1+{}_1C_1 \cdot {}_3C_2=6$ 通りとなり、確率は $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ となる。 $X=8$ である場合の数は、 $(2, 3, 3)$

のカードを引くときだから ${}_2C_1 \cdot {}_3C_2=6$ 通りとなり、確率は $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ となる。以上より、 X の

期待値は

$$5 \cdot \frac{1}{20} + 6 \cdot \frac{3}{10} + 7 \cdot \frac{3}{10} + 8 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{1}{20} = 7$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	$\sqrt{2}$
	イ	$-\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2}$
	ウ	$\frac{5}{8}\pi$
	エ	$\frac{13}{8}\pi$
	オ	$-\sqrt{2}-\frac{3}{2}$
(2)	カ	$\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$
	キ	$(1-t)\vec{a}$
	ク	$\frac{1-t}{2-3t}\vec{b}$
	ケ	$\frac{1-t}{1-2t}$
	コ	$2-3t$

〔解説〕

(1)

三角関数の合成より

$$\begin{aligned}t &= \sin 2x + \cos 2x \\ &= \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq 2\pi$ より、 t が取り得る値の範囲は

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}y &= 4\sin^3 x \cos x - 2\sin^2 x \\ &= 2\sin^2 x (2\sin x \cos x - 1) \\ &= (1 - \cos 2x)(\sin 2x - 1) \\ &= -\sin 2x \cos 2x + \sin 2x + \cos 2x - 1\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}t^2 &= (\sin 2x + \cos 2x)^2 \\ &= 1 + 2\sin 2x \cos 2x \\ \Leftrightarrow \sin 2x \cos 2x &= \frac{t^2 - 1}{2}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}y &= -\frac{t^2 - 1}{2} + t - 1 \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(t - 1)^2\end{aligned}$$

より、 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ だから y の値は $t = -\sqrt{2}$ のとき最小値

$$-\frac{1}{2}(-\sqrt{2} - 1)^2 = -\sqrt{2} - \frac{3}{2}$$

をとり、

$$\begin{aligned}t &= -\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) &= -1\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq 2\pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{17}{4}\pi$ であることに注意して

$$\begin{aligned}2x + \frac{\pi}{4} &= \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi\end{aligned}$$

を得る。

(2)

点 G は△ OAB の重心だから

$$\overrightarrow{\text{OG}} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \qquad \cdots \text{①}$$

となる。点 P は辺 AO を $t:(1-t)$ に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OP}} &= \frac{1-t}{t+(1-t)}\vec{a} \\ &= (1-t)\vec{a}\end{aligned}$$

となる。点 Q は辺 OB 上にあるから

$$\overrightarrow{\text{OQ}} = k\vec{b}$$

とおける。また、点 G は線分 PQ 上にあるから、点 G は線分 PQ を $1-l:l$ に内分するとして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OG}} &= l\overrightarrow{\text{OP}} + (1-l)\overrightarrow{\text{OQ}} \\ &= l(1-t)\vec{a} + (1-l)k\vec{b}\end{aligned}$$

となる。これを、①と比較して

$$\begin{aligned}l(1-t) &= \frac{1}{3}, (1-l)k = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow l &= \frac{1}{3(1-t)}, k = \frac{1-t}{2-3t}\end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$\overrightarrow{\text{OQ}} = \frac{1-t}{2-3t}\vec{b}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{\text{OQ}}{\text{QB}} &= \frac{\frac{1-t}{2-3t}}{1 - \frac{1-t}{2-3t}} \\ &= \frac{1-t}{1-2t} \\ \frac{\text{PG}}{\text{GQ}} &= \frac{1-l}{l} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3(1-t)}}{\frac{1}{3(1-t)}} \\ &= 2-3t\end{aligned}$$

となる。

[3]

(1)

$|x^2 - 2ax| = |x(x - 2a)|$ より, a の値で場合分けする。

[1] $2a \leq 0$, 即ち $a \leq 0$ のとき

$0 \leq x \leq 1$ で $x(x - 2a) \geq 0$ より

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 (x^2 - 2ax) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - ax^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - a \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 < 2a \leq 1$, 即ち $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$0 \leq x \leq 2a$ で $x(x - 2a) \leq 0$, $2a \leq x \leq 1$ で $x(x - 2a) \geq 0$ より

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{2a} (-x^2 + 2ax) dx + \int_{2a}^1 (x^2 - 2ax) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + ax^2 \right]_0^{2a} + \left[\frac{x^3}{3} - ax^2 \right]_{2a}^1 \\ &= \frac{4a^3}{3} + \left(\frac{1}{3} - a + \frac{4a^3}{3} \right) \\ &= \frac{8a^3}{3} - a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

[3] $2a > 1$, 即ち $a > \frac{1}{2}$ のとき

$0 \leq x \leq 1$ で $x(x - 2a) \leq 0$ より

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 (-x^2 + 2ax) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + ax^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} + a \end{aligned}$$

となる。

以上, [1][2][3]より

$$I(a) = \begin{cases} -a + \frac{1}{3} & (a \leq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{8}{3}a^3 - a + \frac{1}{3} & (0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ a - \frac{1}{3} & (a > \frac{1}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I(a) = \begin{cases} -a + \frac{1}{3} & (a \leq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{8}{3}a^3 - a + \frac{1}{3} & (0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ a - \frac{1}{3} & (a > \frac{1}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

$a \leq 0$ のとき

$$I'(a) = -1$$

である。 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$I'(a) = 8a^2 - 1$$

である。 $a > \frac{1}{2}$ のとき

$$I'(a) = 1$$

である。以上より, 増減表を書くと

a	...	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	...
$I'(a)$	-	0	+
$I(a)$	$\searrow$		$\nearrow$

となる。したがって, $I(a)$ は $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき最小値

$$\begin{aligned} I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) &= \frac{8}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) a = \frac{\sqrt{2}}{4}, I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$