

〔1〕

〔解答〕

ア	$\frac{\pi}{3}$	カ	$\frac{3}{20}$
イ	$\frac{7}{2}$	キ	$\frac{11}{60}$
ウ	π	ク	4
エ	-1	ケ	2
オ	$\frac{5}{6}$	コ	1

〔解説〕

(1)

与えられた関数は

$$\begin{aligned} y &= 2\sin^2 x + 2\cos x + 1 \\ \Leftrightarrow y &= 2(1 - \cos^2 x) + 2\cos x + 1 \\ \Leftrightarrow y &= -2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

と変形でき、 $0 \leq x \leq \pi$ のとき $-1 \leq \cos x \leq 1$ であるから、関数 y は

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

のとき最大値

$$-2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$

をとり、

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi$$

のとき最小値

$$-2\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} = -1$$

をとる。

(2)

10本のくじから同時に3本引くとき、その引き方は ${}_{10}C_3$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。よって、当たりくじを1本も引かない確率は、

$$\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{6}$$

であるから、当たりくじを少なくとも1本引く確率は

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

である。また、1等、2等、はずれくじをそれぞれ1本ずつ引く確率は、

$$\frac{{}_1C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{20}$$

である。また、引いた3本の中に2等が2本以上ある確率は、2等が3本ある確率と2等が2本ある確率を足すことによって、

$$\frac{{}_3C_3 + {}_3C_2 \cdot {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{11}{60}$$

と求まる。

(3)

与えられた2次式 $P(x) = x^2 + ax + b$ が $x - (-2 - \sqrt{2})$ で割り切れるとき、因数定理より

$$\begin{aligned} P(-2 - \sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (-2 - \sqrt{2})^2 + a(-2 - \sqrt{2}) + b &= 0 \\ \Leftrightarrow (-2a + b + 6) + (-a + 4)\sqrt{2} &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるが、ここで $\sqrt{2}$ は無理数であり a, b は整数であるから、 $\textcircled{1}$ が成り立つための条件は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -a + 4 = 0 \\ -2a + b + 6 = 0 \end{cases} \\ \therefore &\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - c)P(x) \\ &= (x - c)(x^2 + 4x + 2) \end{aligned}$$

を $x+1$ で割ったときの余りが2となるとき、剰余の定理より

$$\begin{aligned} Q(-1) &= 2 \\ \Leftrightarrow (-1 - c)\{(-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 2\} &= 2 \\ \therefore c &= 1 \end{aligned}$$

となるから、定数 c の値は $c = 1$ である。

[2]

(1)

点Dは線分BCを1:3に内分する点であるから、内分点の公式より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} \\ &= \left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{8}\right)\end{aligned}$$

となる。よって点Dの座標は $D\left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{8}\right)$ である。

$$\text{(答)} \quad D\left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{8}\right)$$

(2)

各ベクトルの成分表示を求めると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x-1, y-1, z) \\ \overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = (x, y-2, z) \\ \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = \left(x, y, z - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

となるから、与えられた関係式にこれらを代入し、成分を比較することで

$$\begin{aligned}4(1-t)\overrightarrow{AP} + 3t\overrightarrow{BP} + t\overrightarrow{CP} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \left(4x+4t-4, 4y-2t-4, 4z-\frac{1}{2}t\right) &= \vec{0} \\ \therefore \begin{cases} x = -t+1 \\ y = \frac{1}{2}t+1 \\ z = \frac{1}{8}t \end{cases}\end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad x = -t+1, y = \frac{1}{2}t+1, z = \frac{1}{8}t$$

(3)

(2)の結果より、

$$\overrightarrow{OP} = \left(-t+1, \frac{1}{2}t+1, \frac{1}{8}t\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2 &= (-t+1)^2 + \left(\frac{1}{2}t+1\right)^2 + \left(\frac{1}{8}t\right)^2 \\ &= \frac{81}{64}t^2 - t + 2\end{aligned}$$

となり、また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} &= (-t+1) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}t+1\right) \cdot 0 + \frac{1}{8}t \cdot \frac{1}{2}t \\ &= \frac{1}{16}t\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad |\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{81}{64}t^2 - t + 2, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{16}t$$

(4)

(3)で求めた結果と、

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \frac{1}{4}$$

を利用すれば、 $\triangle OPC$ の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{81}{64}t^2 - t + 2\right) \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{16}t\right)^2} \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\left(\frac{81}{16}t^2 - 4t + 8\right) - \left(\frac{1}{4}t\right)^2} \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{5t^2 - 4t + 8}\end{aligned}$$

と表せる。また、根号内を平方完成すると、

$$S = \frac{1}{8}\sqrt{5\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}}$$

となるから、 $0 \leq t \leq 1$ において、 S は $t = \frac{2}{5}$ のとき最小値

$$\frac{1}{8}\sqrt{5\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

をとる。

$$\text{(答)} \quad S = \frac{1}{8}\sqrt{5t^2 - 4t + 8}$$

$$t = \frac{2}{5} \text{ のとき最小値 } \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

[3]

(1)

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから、

$$b_1 = a_2 - a_1 = 1$$

であり、また、 $\{a_n\}$ に関する漸化式を変形することにより、

$$a_{n+2} = (r+1)a_{n+1} - ra_n + 1$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} = r(a_{n+1} - a_n) + 1$$

$$\therefore b_{n+1} = rb_n + 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_1 = 1, b_{n+1} = rb_n + 1$$

(2)

(1)の結果より、

$$b_{n+1} = rb_n + 1$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{1}{1-r} = r \left(b_n - \frac{1}{1-r} \right) \quad (\because r \neq 1)$$

であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_n &= r^{n-1} \left(b_1 - \frac{1}{1-r} \right) + \frac{1}{1-r} \\ &= \frac{1-r^n}{1-r} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成立する。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{1-r^n}{1-r}$$

(3)

(2)の結果より、 $r=2$ のとき $b_n = 2^n - 1$ であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 1) \\ &= \frac{2-2^n}{1-2} - (n-1) \\ &= 2^n - n - 1 \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成立する。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^n - n - 1$$

〔4〕

(1)

与えられた関数 $f(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-x)' \cdot \log x + (-x) \cdot (\log x)' \\ &= -\log x - 1 \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減は次表のようになる。

x	(0)	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	極大 $\frac{1}{e}$	↘

よって、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{e}$ のとき極大値 $\frac{1}{e}$ をとる。

(答) $f'(x) = -\log x - 1$

$x = \frac{1}{e}$ のとき極大値 $\frac{1}{e}$

(2)

(1)の結果より、点 $P(t, f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y - f(t) &= f'(t)(x - t) \\ \Leftrightarrow y - (-t \log t) &= (-\log t - 1)(x - t) \\ \therefore y &= (-\log t - 1)x + t \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = (-\log t - 1)x + t$

(3)

(2)の結果より、 ℓ と y 軸との交点 Q の座標は $Q(0, t)$ であるから、求める条件は

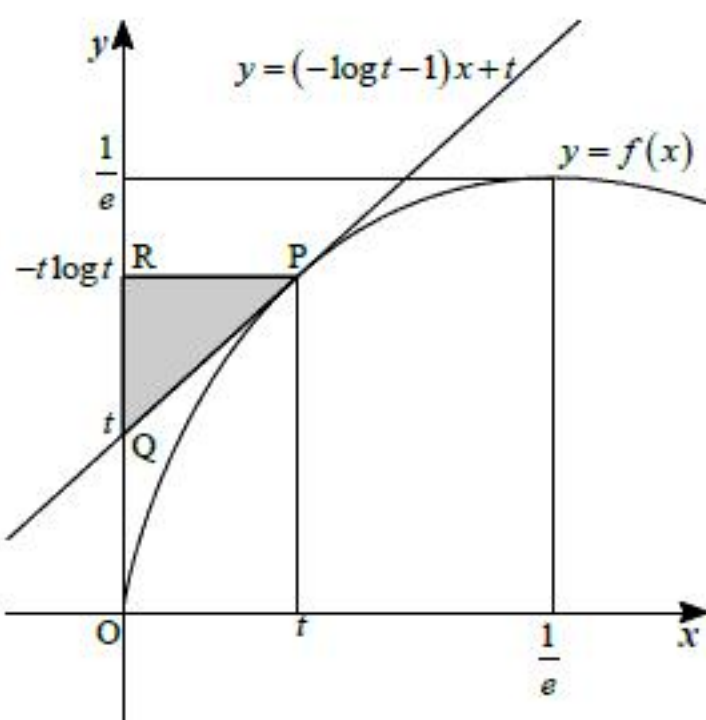
$$\begin{aligned} a &= f(a) \\ \Leftrightarrow a &= -a \log a \\ \Leftrightarrow a(1 + \log a) &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1}{e} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。

(答) $a = \frac{1}{e}$

(4)

(1)の増減表より、 $0 < x < a \left(= \frac{1}{e} \right)$ の区間では $f(x)$ は単調増加であることに注意する。



すると前図より、 $\triangle PQR$ を直線 PR の周りに 1 回転してできる立体の体積は

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{\pi}{3} (-t \log t - t)^2 t \\ &= \frac{1}{3} t^3 (1 + \log t)^2 \end{aligned}$$

と表せる。これを t に関して微分すると、

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{1}{3} (t^3)' (1 + \log t)^2 + \frac{1}{3} t^3 \{ (1 + \log t)^2 \}' \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 3t^2 (1 + \log t)^2 + 2t^3 (1 + \log t) \cdot \frac{1}{t} \right\} \\ &= \frac{1}{3} t^2 (1 + \log t) (5 + 3 \log t) \end{aligned}$$

となるから、 $0 < t < \frac{1}{e}$ における $V(t)$ の増減は次表のようになる。

t	(0)	...	$e^{-\frac{5}{3}}$	...	$\left(\frac{1}{e} \right)$
$V'(t)$		+	0	-	
$V(t)$		↗	極大 $\frac{4\pi}{27e^5}$	↘	

したがって、 $V(t)$ は $t = e^{-\frac{5}{3}}$ のとき極大値 $\frac{4\pi}{27e^5}$ をとる。

(答) $t = e^{-\frac{5}{3}}$ のとき極大値 $\frac{4\pi}{27e^5}$