

〔1〕

〔解答〕

- (1) ☐ア $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ ☐イ $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ☐ウ 0 ☐エ 1 ☐オ $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$
- (2) ☐カ $\frac{125}{729}$ ☐キ $\frac{512}{729}$ ☐ク $\frac{64}{729}$ ☐ケ $\frac{191}{243}$ ☐コ $\frac{52}{243}$

〔解説〕

- (1) $f(x) = x^2 - (2a+1)x + 2a^2$ とおく。 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると、

$$D = (2a+1)^2 - 4 \cdot 2a^2$$

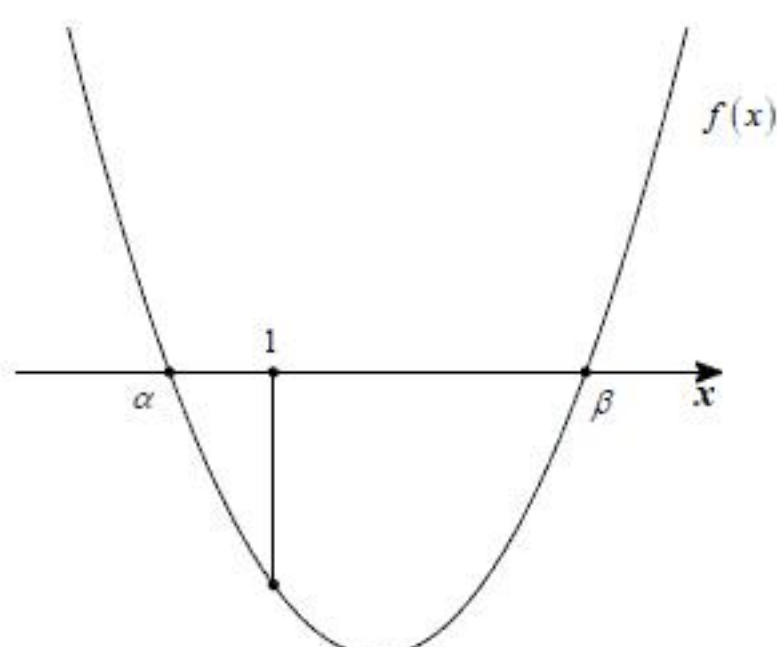
$$= -4a^2 + 4a + 1$$

となる。 C と x 軸が 2 個の共有点をもつとき

$$D > 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 4a + 1 > 0$$

$$\therefore \frac{1-\sqrt{2}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。以下、この条件のもとで考える。



$\alpha < 1 < \beta$ となるとき、上図より

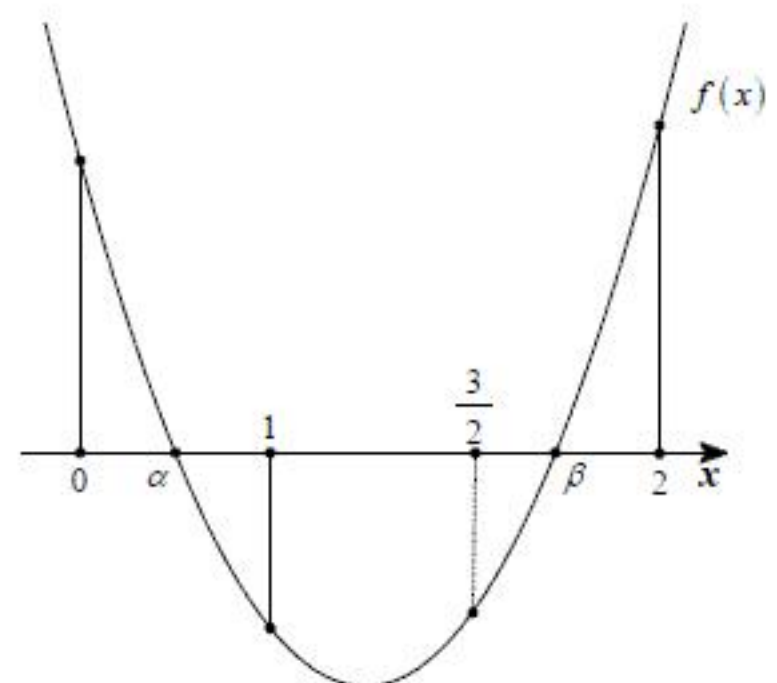
$$f(1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a < 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-1) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①と②より、 $\alpha < 1 < \beta$ となるような a の値の範囲は、 $0 < a < 1$ である。



同様に、 $0 < \alpha < 1, \frac{3}{2} < \beta < 2$ となるとき、上図より

$$f(0) > 0 \Leftrightarrow 2a^2 > 0$$

$$\therefore a \neq 0 \quad (\textcircled{1} \text{のもとでは常に成立})$$

$$f(1) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 1 \quad (\because \textcircled{2})$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + \frac{3}{4} < 0$$

$$\therefore \frac{3-\sqrt{3}}{4} < a < \frac{3+\sqrt{3}}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$f(2) > 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 4a + 2 = 2(a-1)^2 > 0$$

$$\therefore a \neq 1 \quad (\textcircled{1} \text{のもとでは常に成立})$$

となる。ここで、

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} < 0 < \frac{3-\sqrt{3}}{4} < 1 < \frac{3+\sqrt{3}}{4} < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

となるので、①、②、③より、 $0 < \alpha < 1, \frac{3}{2} < \beta < 2$ となるような a の値の範囲は、

$$\frac{3-\sqrt{3}}{4} < a < 1 \text{ である。}$$

(2)

事象 A の確率は

$$\left(\frac{5}{9}\right)^3 = \frac{125}{729}$$

であり、事象 B の確率は

$$\left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{512}{729}$$

である。事象 A と事象 B の積事象は、1 度も赤玉を取り出さないかつ 1 度も青玉を取り出さない事象であるので、その確率は

$$\left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729}$$

となる。事象 A と事象 B の和事象は、1 度も赤玉を取り出さないまたは 1 度も青玉を取り出さない事象であるので、その確率は

$$\left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{8}{9}\right)^3 - \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{191}{243}$$

となる。赤玉と青玉のいずれも少なくとも 1 回は取り出す事象は、事象 A と事象 B の和事象の余事象となるので、その確率は

$$1 - \frac{191}{243} = \frac{52}{243}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

- (1) $\boxed{\text{ア}}$ 2 $\boxed{\text{イ}}$ $3t^2 - 20t - 6$ $\boxed{\text{ウ}}$ -1 $\boxed{\text{エ}}$ 1 $\boxed{\text{オ}}$ $-\frac{118}{3}$
- (2) $\boxed{\text{カ}}$ $\frac{4}{9}$ $\boxed{\text{キ}}$ $\frac{\sqrt{65}}{9}$ $\boxed{\text{ク}}$ $\frac{\sqrt{65}}{2}$ $\boxed{\text{ケ}}$ $\frac{3-\sqrt{14}}{5}$ $\boxed{\text{コ}}$ $\frac{3+\sqrt{14}}{5}$

〔解説〕

(1)

$3^x > 0$ かつ $3^{-x} > 0$ なので、相加相乗平均の関係より、

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2$$

となり、等号は $3^x = 3^{-x}$ 、すなわち $x = 0$ のときに成立するので、 t の取りうる範囲は $t \geq 2$ である。また

$$\begin{aligned} y &= 3(9^x + 9^{-x}) - 20(3^x + 3^{-x}) \\ &= 3(3^{2x} + 3^{-2x}) - 20(3^x + 3^{-x}) \\ &= 3(3^x + 3^{-x})^2 - 20(3^x + 3^{-x}) - 6 \\ &= 3t^2 - 20t - 6 \end{aligned}$$

となる。平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= 3t^2 - 20t - 6 \\ &= 3\left(t - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{118}{3} \end{aligned}$$

となり、 $\frac{10}{3} > 2$ なので、関数 y は

$$\begin{aligned} t &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3 \cdot 3^x - 1)(3^x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3^x &= 3, 3^{-1} \\ \therefore x &= \pm 1 \end{aligned}$$

のとき、最小値 $-\frac{118}{3}$ をとる。

(2)

$$\begin{aligned} \overline{\text{AB}} &= (-2, 2, -1) \\ \overline{\text{AC}} &= (-1, 2, 2) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{\text{AB}} \cdot \overline{\text{AC}}}{|\overline{\text{AB}}| |\overline{\text{AC}}|} \\ &= \frac{(-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{65}}{9} \quad (\because \sin \theta > 0) \end{aligned}$$

となるので、三角形の面積の公式より、

$$\begin{aligned} \triangle \text{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot |\overline{\text{AB}}| \cdot |\overline{\text{AC}}| \cdot \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{65}}{2} \end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned} \overline{\text{AB}} &= (-2, 2, -1) \\ \overline{\text{AD}} &= (a^2 - 1, 2a, 0) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{\text{AB}} \cdot \overline{\text{AD}}}{|\overline{\text{AB}}| |\overline{\text{AD}}|} \\ &= \frac{(-2) \cdot (a^2 - 1) + 2 \cdot 2a + (-1) \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{(a^2 - 1)^2 + (2a)^2 + 0^2}} \\ &= \frac{-2a^2 + 4a + 2}{3(a^2 + 1)} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} &= \frac{-2a^2 + 4a + 2}{3(a^2 + 1)} \Leftrightarrow 5a^2 - 6a - 1 = 0 \\ \therefore a &= \frac{3 \pm \sqrt{14}}{5} \end{aligned}$$

となる。

[3]

(1)

$$f(x) = (x+1)^2(x-3)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1) \cdot (x-3) + (x+1)^2 \\ &= 3x^2 - 2x - 5 \\ &= (3x-5)(x+1) \end{aligned}$$

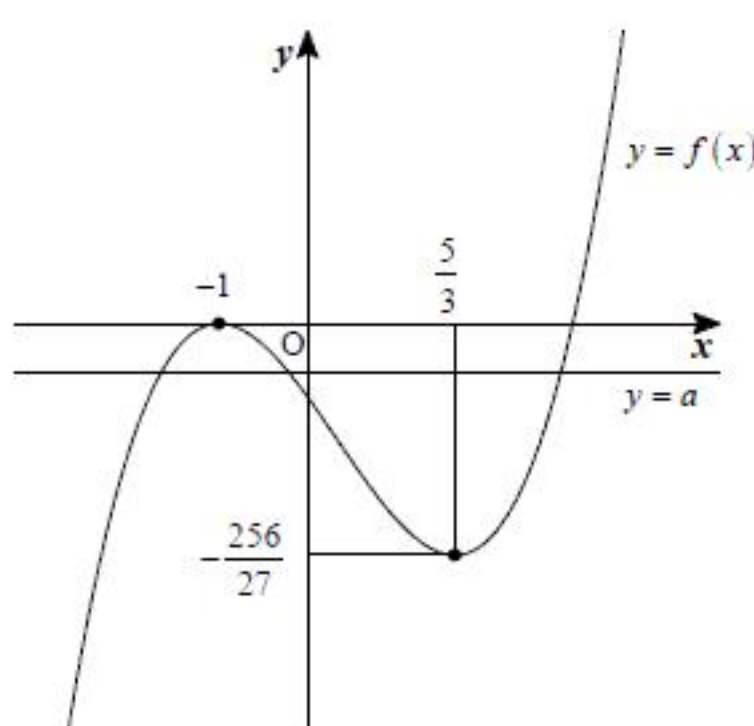
となるので、 $x = -1, \frac{5}{3}$ のとき $f'(x) = 0$ となる。よって、増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	$\frac{5}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{256}{27}$	$\nearrow$

増減表より、関数 $f(x)$ は $x = -1$ で極大値 0 をとり、 $x = \frac{5}{3}$ で極小値 $-\frac{256}{27}$ をとる。

(答) $x = -1$ で極大値 0, $x = \frac{5}{3}$ で極小値 $-\frac{256}{27}$

(2)



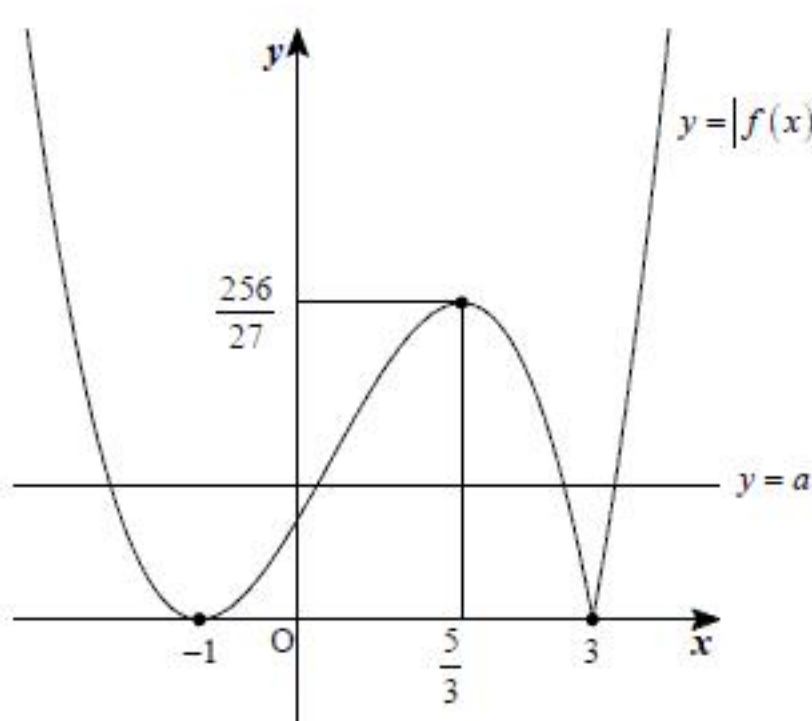
上図より、

$$\left\{ \begin{array}{ll} a < -\frac{256}{27}, 0 < a & \text{のとき} \quad 1 \text{ 個} \\ a = -\frac{256}{27}, 0 & \text{のとき} \quad 2 \text{ 個} \\ -\frac{256}{27} < a < 0 & \text{のとき} \quad 3 \text{ 個} \end{array} \right.$$

となる。

$$(答) \left\{ \begin{array}{ll} a < -\frac{256}{27}, 0 < a & \text{のとき} \quad 1 \text{ 個} \\ a = -\frac{256}{27}, 0 & \text{のとき} \quad 2 \text{ 個} \\ -\frac{256}{27} < a < 0 & \text{のとき} \quad 3 \text{ 個} \end{array} \right.$$

(3)



上図より、

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = 0, \frac{256}{27} < a & \text{のとき} \quad 2 \text{ 個} \\ a = \frac{256}{27} & \text{のとき} \quad 3 \text{ 個} \\ 0 < a < \frac{256}{27} & \text{のとき} \quad 4 \text{ 個} \end{array} \right.$$

となる。

$$(答) \left\{ \begin{array}{ll} a = 0, \frac{256}{27} < a & \text{のとき} \quad 2 \text{ 個} \\ a = \frac{256}{27} & \text{のとき} \quad 3 \text{ 個} \\ 0 < a < \frac{256}{27} & \text{のとき} \quad 4 \text{ 個} \end{array} \right.$$