

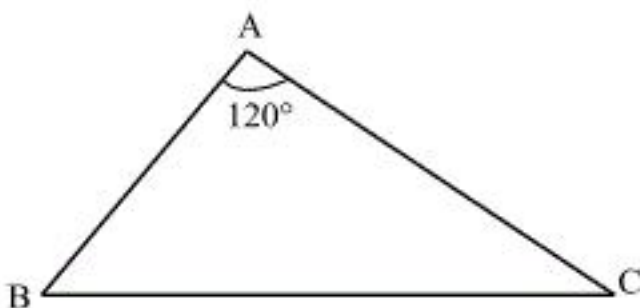
【1】

【解答】

(1)	ア	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	イ	7
	ウ	$\frac{15\sqrt{3}}{14}$	エ	$\frac{11}{14}$
	オ	$\frac{15}{56}$		
(2)	カ	$\frac{4}{81}$	キ	$\frac{10}{81}$
	ク	$\frac{65}{81}$	ケ	$\frac{11}{27}$
	コ	$\frac{50}{81}$		

【解説】

(1)



$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cos A = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

となる。次に、余弦定理から、

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \\ &= 49 \end{aligned}$$

となるので、

$$BC = 7$$

となる。ここで、 $BH = x$ とおく。このとき、 $CH = 7 - x$ となるので、三平方の定理から、

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &= 25 - (7 - x)^2 \\ \therefore x &= \frac{33}{14} \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AB^2 - BH^2} \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

となる。一方、余弦定理から、

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \\ &= \frac{11}{14} \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\angle BAK = \angle CAK$ から、

$$BK : CK = AB : AC = 3 : 5$$

であるので、

$$\begin{aligned} BK &= 7 \cdot \frac{3}{8} \\ &= \frac{21}{8} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} KH &= BK - BH \\ &= \frac{15}{56} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$S = 5$ となるのは 1 が 3 回, 2 が 1 回出る場合であるから、このときの確率は、

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{81}$$

となる。次に、 $S = 6$ となるのは 1 が 3 回, 3 が 1 回出る場合、または、1 が 2 回, 2 が 2 回出る場合であるから、このときの確率は、

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) + {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{81}$$

となる。

X が 2 で割り切れないのは 2 が 1 回も出ない場合であるから、このときの確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

となる。この余事象を考え、 X が 2 で割り切れる確率は、

$$1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

となる。次に、 X が 4 で割り切れないのは 2 が 1 回も出ない、または 1 回のみ出る場合であるから、このときの確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 + {}_4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$$

となる。この余事象を考え、 X が 4 で割り切れる確率は、

$$1 - \frac{16}{27} = \frac{11}{27}$$

となる。さらに、 X が 6 で割り切れないのは、2 または 3 が 1 回も出ない場合である。ここで、3 が 1 回も出ない場合の確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

であり、2 と 3 がともに 1 回も出ない場合の確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

であるので、 X が 6 で割り切れない場合の確率は、

$$\frac{16}{81} + \frac{16}{81} - \frac{1}{81} = \frac{31}{81}$$

となる。この余事象を考え、 X が 6 で割り切れる場合の確率は、

$$1 - \frac{31}{81} = \frac{50}{81}$$

となる。

【2】

【解答】

(1)	ア	-1	イ	$-t^2+2t+1$
	ウ	$-1-\sqrt{2}$	エ	$-1+\sqrt{2}$
	オ	2	カ	-1
(2)	キ	150	ク	$\sqrt{3}$
	ケ	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	コ	1
	サ	0	シ	$-\frac{3}{2}$

【解説】

(1)

(i)

$$\begin{aligned}t &= x^2+2x \\ &= (x+1)^2-1\end{aligned}$$

と変形できる。 $(x+1)^2 \geq 0$ であるから、 t のとり得る値の範囲は $t \geq -1$ となる。 x の関数

$$y = -x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1$$

を $t = x^2 + 2x$ の式で表すと、

$$\begin{aligned}y &= -x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1 \\ &= -(x^2+2x)^2 + 4x^2 - 2x^2 + 4x + 1 \\ &= -(x^2+2x)^2 + 2(x^2+2x) + 1 \\ &= -t^2 + 2t + 1\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}y &= -t^2 + 2t + 1 \\ &= -(t-1)^2 + 2\end{aligned}$$

となるから、 y は $t=1$ となるとき、すなわち、

$$x^2+2x=1 \Leftrightarrow x=-1 \pm \sqrt{2}$$

となるときに最大値 2 をとる。

(ii)

$$\begin{aligned}y &= -x^4 - 4x^3 + (2a-4)x^2 + 4ax - a^2 + 2 \\ &= -(x^2+2x)^2 + 4x^2 + (2a-4)x^2 + 4ax - a^2 + 2 \\ &= -(x^2+2x)^2 + 2a(x^2+2x) - a^2 + 2 \\ &= -t^2 + 2at - a^2 + 2 \\ &= -(t-a)^2 + 2\end{aligned}$$

となる。よって、 y の最大値が 2 となるのは、 a が t のとり得る範囲内にあって、 $t=a$ となるときである。したがって、 $t \geq -1$ であるから、求める a の範囲は $a \geq -1$ である。

(2)

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2 &= (\sqrt{7})^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 7 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とおくと、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}}{1 \cdot \sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 150^\circ$$

となる。よって、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから 1 次独立である。したがって、 $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおける。

$$|\vec{c}|=1 \text{ より、}$$

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow p^2|\vec{a}|^2 + q^2|\vec{b}|^2 + 2pq\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \\ \Leftrightarrow p^2 + 3q^2 - 3pq &= 1 \quad \cdot \cdot \cdot \text{①}\end{aligned}$$

となる。また、 $\vec{c}$ は $\vec{a}$ と垂直だから、

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow (p\vec{a} + q\vec{b}) \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow p - \frac{3}{2}q &= 0 \quad \cdot \cdot \cdot \text{②}\end{aligned}$$

を得る。②式を①式に代入すると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}q\right)^2 + 3q^2 - 3 \cdot \frac{3}{2}q \cdot q &= 1 \\ \Leftrightarrow q^2 &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ が $\vec{b} \cdot \vec{c} > 0$ であることより、

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &> 0 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot (p\vec{a} + q\vec{b}) &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2}p + 3q &> 0\end{aligned}$$

となる。②式を代入すると

$$\begin{aligned}-\frac{3}{2}p + 3q &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}q + 3q &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}q &> 0 \\ \Leftrightarrow q &> 0\end{aligned}$$

となる。よって、 $q^2 = \frac{4}{3}$ より $q = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 、②式より $p = \frac{3}{2}q = \sqrt{3}$ となり、

$$\vec{c} = \sqrt{3}\vec{a} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\vec{b}$$

とわかる。このとき、

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{b} \cdot \left(\sqrt{3}\vec{a} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\vec{b}\right) \\ &= \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である。次に、 $\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{c}$ について、

$$\begin{aligned}0 \leq \vec{x} \cdot \vec{a} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq (s\vec{a} + t\vec{c}) \cdot \vec{a} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq s \cdot 1 + t \cdot 0 \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 1\end{aligned}$$

となり、同様にして、

$$\begin{aligned}0 \leq \vec{x} \cdot \vec{c} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq (s\vec{a} + t\vec{c}) \cdot \vec{c} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq s \cdot 0 + t \cdot 1 \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1\end{aligned}$$

となる。このとき内積 $\vec{x} \cdot \vec{b}$ は、

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{b} &= (s\vec{a} + t\vec{c}) \cdot \vec{b} \\ &= -\frac{3}{2}s + \frac{\sqrt{3}}{2}t\end{aligned}$$

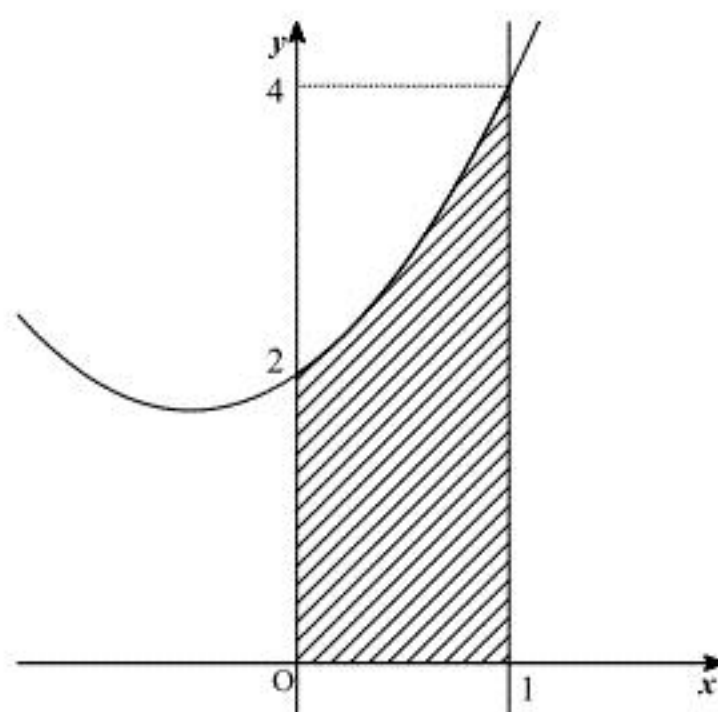
である。 $-\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{2}s \leq 0, 0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、 s, t はそれぞれ独立に動くことから、

$$-\frac{3}{2}s + \frac{\sqrt{3}}{2}t \text{ の最小値は } s=1, t=0 \text{ のとき } -\frac{3}{2} \text{ となる。}$$

[3]

(1)

求める面積は下図の斜線部である。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2 + x + 2) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 \\ &= \frac{17}{6}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{17}{6}$

(2)

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{n} \cdot 2n \\ &= \frac{17}{6} + \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $S_n = \frac{17}{6} + \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2}$

(3)

$$S_n - S = \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2} > \frac{1}{n}$$

であるから、 $S_n - S < \frac{1}{10}$ のとき、少なくとも $n > 10$ である。また、 $n = 11$ のとき、

$$S_{11} - S = \frac{1}{11} + \frac{1}{6 \cdot 11^2} < \frac{1}{11} + \frac{1}{110} = \frac{1}{10}$$

となるから、求める最小の自然数 n は 11 である。

(答) $n = 11$