

〔1〕

〔解答〕

(1)

$$\boxed{\text{ア}} \quad -1 < a < 2 \quad \boxed{\text{イ}} \quad 4(-a^2 + a + 2) \quad \boxed{\text{ウ}} \quad 9$$

(2)

$$\boxed{\text{エ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{オ}} \quad 4 - x \quad \boxed{\text{カ}} \quad 2 - x \quad \boxed{\text{キ}} \quad 1$$

(3)

$$\boxed{\text{ク}} \quad \frac{2}{\cos^2 2x} \quad \boxed{\text{ケ}} \quad 4 \quad \boxed{\text{コ}} \quad 1 - \frac{\pi}{2}$$

〔解説〕

(1)

与えられた2次方程式  $x^2 - 2(a+1)x + 2a^2 + a - 1 = 0$  が異なる2つの実数解をもつので、判別式を  $D$  とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-(a+1)\}^2 - (2a^2 + a - 1) \\ &= -a^2 + a + 2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (a-2)(a+1) < 0 \\ &\therefore -1 < a < 2 \end{aligned}$$

である。また、これらの実数解を  $\alpha, \beta$  とおくと、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2(a+1), \alpha\beta = 2a^2 + a - 1$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4(a+1)^2 - 4(2a^2 + a - 1) \\ &= 4(-a^2 + a + 2) \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $a$  が  $-1 < a < 2$  の範囲を動くとき、

$$(\alpha - \beta)^2 = -4\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 9$$

は、 $a = \frac{1}{2}$  のときに最大値9をとる。

(2)

$$\log_{10} y = 2\log_{10}(3-x) - \log_{10}(2-x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とする。①の右辺の2つの対数がともに定義される条件は、

$$\begin{aligned} 3-x > 0 \text{ かつ } 2-x > 0 \\ &\Leftrightarrow x < 2 \end{aligned}$$

である。また、①の左辺の対数についても同様に、 $y > 0$  である。したがって、条件

$$x < 2 \text{ かつ } y > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

の下では、①は

$$\log_{10} y = \log_{10} \frac{(3-x)^2}{2-x} \Leftrightarrow y = \frac{(3-x)^2}{2-x}$$

となり、

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2 - 6x + 9}{2-x} \\ &= \frac{(2-x)(4-x) + 1}{2-x} \\ &= 4 - x + \frac{1}{2-x} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $2-x = t$  とおくと、

$$y = 2 + t + \frac{1}{t}$$

となる。また、条件②より  $t$  のとりうる値の範囲は  $t > 0$  であるから、相加相乗平均により

$$y = 2 + t + \frac{1}{t} \geq 2 + 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 4$$

が成り立つ。等号成立は、 $t = \frac{1}{t}$  かつ  $t > 0$  のとき、すなわち

$$t = 2 - x = 1 \therefore x = 1$$

のときである。したがって、 $y$  が最小になるときの  $x$  の値は  $x = 1$  である。

(3)

関数  $f(x) = \tan 2x$  の導関数は

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

である。よって、 $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 4$  であるから、曲線  $y = f(x)$  上の点

$$\left(\frac{\pi}{8}, f\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$$

における接線の方程式は

$$y = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 1 \Leftrightarrow y = 4x + 1 - \frac{\pi}{2}$$

である。

## [2]

(1)

$$\overrightarrow{AP} = (x, y-2, z), \overrightarrow{BP} = (x, y+2, z)$$

であるので

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)(y+2) + z^2 + 2(0-4+0) = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 12$$

となる。ここで、 $x^2 \geq 0$ ,  $y^2 \geq 0$ ,  $z^2 \geq 0$  から

$$0 \leq y^2 \leq 12$$

$$\therefore -2\sqrt{3} \leq y \leq 2\sqrt{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 12, \quad -2\sqrt{3} \leq y \leq 2\sqrt{3}$$

(2)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= x^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 4 \\ &= 4(4-y) \end{aligned}$$

となるので,

$$|\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{4-y}$$

である。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{4-y}$$

(3)

(2)と同様にして

$$|\overrightarrow{BP}| = 2\sqrt{4+y}$$

となる。よって,

$$|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{BP}| = 2\sqrt{4-y} \cdot 2\sqrt{4+y} = 4\sqrt{16-y^2}$$

となる。(1)より  $-2\sqrt{3} \leq y \leq 2\sqrt{3}$  であるので、根号内の2次関数が最大となるのは  $y=0$  のときであり、また、最小となるのは  $y=\pm 2\sqrt{3}$  のときである。したがって、

$$|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{BP}| \text{の最大値は } 4\sqrt{16-0^2} = 16, \text{ 最小値は } 4\sqrt{16-12} = 8$$

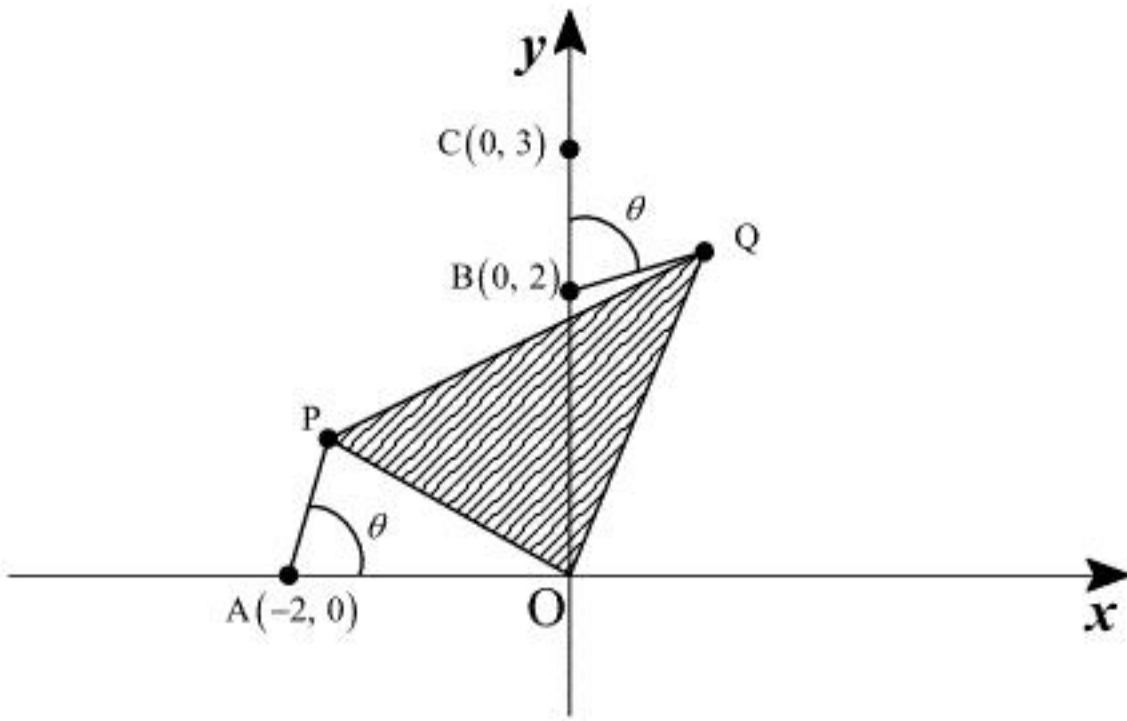
となる。また、最小となるときの点Pの座標は  $(0, -2\sqrt{3}, 0), (0, 2\sqrt{3}, 0)$  である。

(答) 最大値16, 最小値8,

最小値をとるときのPの座標  $(0, -2\sqrt{3}, 0), (0, 2\sqrt{3}, 0)$

[3]

(1)



前図より

$$P(-2 + \cos \theta, \sin \theta), Q(\sin \theta, 2 + \cos \theta)$$

である。

$$(答) P(-2 + \cos \theta, \sin \theta), Q(\sin \theta, 2 + \cos \theta)$$

(2)

(1)の結果より

$$\overline{PQ} = (\sin \theta + 2 - \cos \theta, 2 + \cos \theta - \sin \theta)$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\overline{PQ}|^2 &= (\sin \theta + 2 - \cos \theta)^2 + (2 + \cos \theta - \sin \theta)^2 \\ &= 10 - 4 \sin \theta \cos \theta \\ &= 10 - 2 \sin 2\theta \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \theta < \pi$  より  $0 < 2\theta < 2\pi$  であるから、 $|\overline{PQ}|^2$  は  $2\theta = \frac{3}{2}\pi$ 、すなわち  $\theta = \frac{3}{4}\pi$  のとき最大値

$$10 - 2 \cdot (-1) = 12$$

をとり、 $2\theta = \frac{\pi}{2}$  すなわち  $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき最小値

$$10 - 2 \cdot 1 = 8$$

をとる。以上より、2点P, Q間の距離は  $\theta = \frac{3}{4}\pi$  のとき最大値  $2\sqrt{3}$  をとり、 $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき最小値  $2\sqrt{2}$  をとる。

$$(答) \theta = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき最大値 } 2\sqrt{3}, \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき最小値 } 2\sqrt{2}$$

(3)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |(-2 + \cos \theta) \cdot (2 + \cos \theta) - \sin \theta \cdot \sin \theta| \\ &= \frac{1}{2} |\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 4| \\ &= \frac{1}{2} |2 \cos^2 \theta - 5| \\ &= \frac{1}{2} (5 - 2 \cos^2 \theta) \quad (\because 2 \cos^2 \theta < 5) \end{aligned}$$

となる。ここで  $0 < \theta < \pi$  より、 $S$  が最大値をとるのは  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のときであり、その最大値は

$$\frac{1}{2} (5 - 2 \cdot 0^2) = \frac{5}{2}$$

である。

$$(答) S = \frac{1}{2} (5 - 2 \cos^2 \theta)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{5}{2}$$

〔4〕

(1)

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(2n+3)!}{\{(n+1)!\}^2}}{\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}} \\ &= \frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{2(2n+3)}{n+1}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n+3)}{(n+1)}$$

(2)

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_0^1 (1-x^2) dx \\ &= \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{3!}{(1!)^2} \\ &= 6\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}K_1 &= a_1 J_1 \\ &= 6 \cdot \frac{2}{3} \\ &= 4\end{aligned}$$

となる。同様にして計算すると

$$\begin{aligned}J_2 &= \int_0^1 (1-x^2)^2 dx \\ &= \int_0^1 (1-2x^2+x^4) dx \\ &= \left[ x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{5!}{(2!)^2} \\ &= \frac{120}{4} \\ &= 30\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}K_2 &= a_2 J_2 \\ &= 30 \cdot \frac{8}{15} \\ &= 16\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx &= -\int_0^1 (1-x^2) (1-x^2)^n dx + \int_0^1 (1-x^2)^n dx \\ &= -J_{n+1} + J_n\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) K_1 = 4, K_2 = 16, \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx = -J_{n+1} + J_n$$

(3)

(2)より,

$$\begin{aligned}J_{n+1} &= \int_0^1 (x)' \cdot (1-x^2)^{n+1} dx = \left[ x(1-x^2)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 x(n+1)(1-x^2)^n (-2x) dx \\ &= 2(n+1) \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx \\ &= 2(n+1)(-J_{n+1} + J_n)\end{aligned}$$

$$\therefore J_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} J_n$$

となる。したがって, (1)から

$$\begin{aligned}\frac{K_{n+1}}{K_n} &= \frac{a_{n+1} J_{n+1}}{a_n J_n} \\ &= \frac{2(2n+3)}{(n+1)} \cdot \frac{2n+2}{2n+3} \\ &= 4\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) J_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} J_n, \frac{K_{n+1}}{K_n} = 4$$

(4)

(2)(3)より

$$\begin{aligned}K_n &= \frac{K_n}{K_{n-1}} \times \frac{K_{n-1}}{K_{n-2}} \times \cdots \times \frac{K_2}{K_1} \times K_1 \\ &= 4^{n-1} \cdot 4 \\ &= 4^n\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}J_n &= \frac{K_n}{a_n} \\ &= \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) K_n = 4^n, J_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

(5)

二項定理より  $(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k 1^{n-k} (-x^2)^k$  であることに注意して

$$\begin{aligned}J_n &= \int_0^1 (1-x^2)^n dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n {}_n C_k 1^{n-k} (-x^2)^k dx \\ &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx \\ &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-1)^k \left[ \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= L_n\end{aligned}$$

となる。

(証明終)