

〔1〕

〔解答〕

ア	-1	イ	$\frac{5}{2}$	ウ	-1
エ	1	オ	$\frac{5}{2}$	カ	$\frac{9}{20}$
キ	$\frac{1}{2}$	ク	$\frac{1}{20}$	ケ	$\frac{13}{5}$
コ	$\frac{9}{100}$				

〔解説〕

(1)

[1] $4x-3 \geq 0$ ，すなわち $x \geq \frac{3}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} 4x-3 &> 7 \\ \therefore x &> \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

[2] $4x-3 < 0$ ，すなわち $x < \frac{3}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} 3-4x &> 7 \\ \therefore x &< -1 \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2]より, $|4x-3| > 7$ の解は,

$$x < -1, x > \frac{5}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また, $(x-1)(|4x-3|-7) > 0$ について,

[1] $x > 1$ かつ $|4x-3| > 7$ のとき

$$\textcircled{1} \text{より, } x > \frac{5}{2} \text{ となる。}$$

[2] $x < 1$ かつ $|4x-3| < 7$ のとき

$$|4x-3| < 7 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{5}{2}$$

であるから, $x < 1$ と合わせて, $-1 < x < 1$ となる。

以上, [1], [2]より, $(x-1)(|4x-3|-7) > 0$ の解は,

$$-1 < x < 1, x > \frac{5}{2}$$

となる。

(2)

(i)

$X=2$ となるのは, A から赤玉を取り出し, B から白玉を取り出す場合であるから,

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$$

となる。

$X=3$ となるのは, A から赤玉を取り出し, B から赤玉を取り出す場合と, A から白玉を取り出し, B から白玉を取り出す場合の2通りがあるから,

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

となる。 $X=4$ となるのは, A から白玉を取り出し, B から赤玉を取り出す場合であるから,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

となる。したがって, X の期待値は,

$$2 \cdot \frac{9}{20} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{20} = \frac{13}{5}$$

と求まる。

(ii)

(i)の試行の後もう一度同じ試行をしてAの赤玉が1個となるのは, (i)の施行の後で $X=2$ となり, さらに, Aから赤玉を取り出し, Bから白玉を取り出す場合であるから, 求める確率は

$$\frac{9}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{100}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

ア	$8t^3-6t^2+3$	イ	$\frac{\pi}{6}$	ウ	$\frac{5}{6}\pi$
エ	$\frac{5}{2}$	オ	4	カ	$s+t+3$
キ	$-s$	ク	$t-1$	ケ	$-\frac{4}{3}$
コ	$-\frac{1}{3}$	サ	$\frac{\sqrt{10}}{5}$		

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}y &= -8\sin\theta\cos^2\theta + 3\cos 2\theta + 8\sin\theta \\&= -8\sin\theta(1-\sin^2\theta) + 3(1-2\sin^2\theta) + 8\sin\theta \\&= 8\sin^3\theta - 6\sin^2\theta + 3\end{aligned}$$

となる。 $t = \sin\theta$ とすると

$$y = 8t^3 - 6t^2 + 3$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}y' &= 24t^2 - 12t \\&= 12t(2t-1)\end{aligned}$$

となり、 $0 \leq \theta \leq \pi$ だから、 $0 \leq \sin\theta \leq 1$ 、すなわち $0 \leq t \leq 1$ であることに注意して増減表を作ると以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
y'	0	-	0	+	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

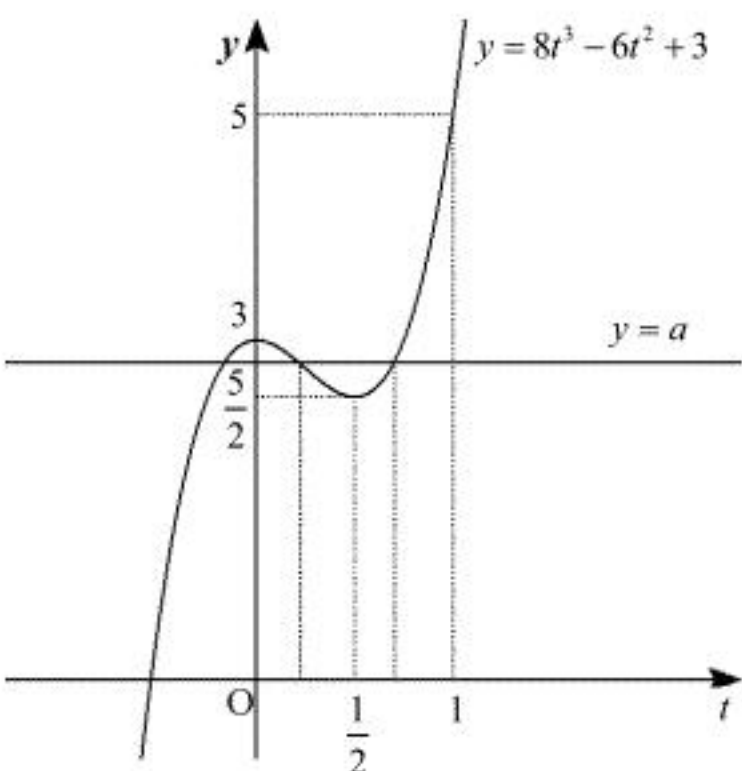
したがって、 y は $t = \frac{1}{2}$ のとき、すなわち $\sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のときに最小値

$$\begin{aligned}y &= 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \\&= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

をとる。また、 a の値が $\frac{5}{2} < a < 3$ を満たすとき、方程式

$$\begin{aligned}-8\sin\theta\cos^2\theta + 3\cos 2\theta + 8\sin\theta &= a \\ \Leftrightarrow 8t^3 - 6t^2 + 3 &= a\end{aligned}$$

を満たす t の個数は $y = 8t^3 - 6t^2 + 3$ と $y = a$ の交点の数に等しいことを利用して、図を書くとき下図のようになる。



よって、 a の値が $\frac{5}{2} < a < 3$ を満たすとき、 $y = 8t^3 - 6t^2 + 3$ と $y = a$ の交点の数は 2 個存在し、

それぞれの交点の t 座標は $0 < t < 1$ を満たす。 $t = \sin\theta$ を満たす θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の範囲に 1 個ずつ存在するから、結局解の数は全部で $2 \times 2 = 4$ (個) となる。

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BQ} &= t\overrightarrow{BC} \\&= t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\&= t(4-3, 0-0, 0-(-1)) \\&= t(1, 0, 1)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BP} \\&= \overrightarrow{BQ} - (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) \\&= (t - (-s) + 3, 0 - s + 0, t - 0 + (-1)) \\&= (s + t + 3, -s, t - 1)\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{BC}$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2s + t &= -3 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow s + 2t &= -2\end{aligned}$$

となる。これらを解いて、

$$s = -\frac{4}{3}, t = -\frac{1}{3}$$

を得る。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right) \\ \overrightarrow{PQ} &= \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) \\ \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\&= \left(\frac{8}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\cos\angle POQ &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}|} \\&= \frac{\frac{32}{9}}{\sqrt{\frac{32}{9}} \cdot \sqrt{\frac{80}{9}}} \\&= \frac{\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

を得る。

〔3〕

(1)

$y=f(x)$ のグラフが x 軸と 2 個の共有点を持つのは、 $f(x)$ が極大値と極小値をもち、かつこの 2 つの極値のうち一方が 0 となるときである。ここで、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 4px \\ &= 6x\left(x + \frac{2}{3}p\right) \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ が極値をとるのは $x=0, -\frac{2}{3}p$ のときであり、

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f\left(-\frac{2}{3}p\right) &= \frac{8}{27}p^3 + 1 \end{aligned}$$

となるから、求める p の条件は

$$\begin{aligned} f(0) \cdot f\left(-\frac{2}{3}p\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{8}{27}p^3 + 1 &= 0 \\ \therefore p &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ &= 2(x-1)^2\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

であるから、2 個の共有点の x 座標 α, β は、 $\alpha < \beta$ より

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = -\frac{3}{2}, \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 1$$

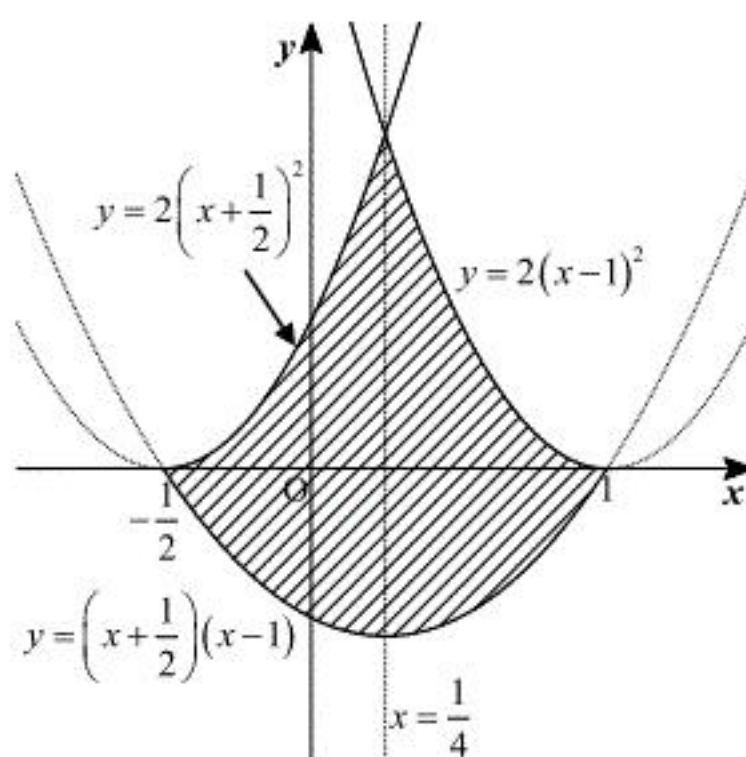
(2)

$y=2(x-\alpha)^2$ と $y=2(x-\beta)^2$ が

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

に関して線対称であり、また $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ も $x=\frac{1}{4}$ に関して対称であることに注意する

と、(1)の結果よりこの 3 つの関数のグラフで囲まれた図形は次図の斜線部となる。



よって求める面積は、この図形が $x=\frac{1}{4}$ に関して対称であることに注意して、

$$\begin{aligned} 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \left\{ 2(x-1)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1) \right\} dx &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{5}{2}x \right]_{\frac{1}{4}}^1 \\ &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{8}$$