

2014—(A(理系))

■ 数 学 問 題

15 : 00 ~ 16 : 30 (90分)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙1部(8ページ)、記述式解答用紙(あ)1枚、記述式解答用紙(い)1枚、記述式解答用紙(う)1枚、記述式解答用紙(え)1枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
なお、記述式解答用紙はセットになっています。監督者の指示に従って、解答用紙を破ったりしないよう注意して、ミシン目に沿って1枚ずつ切り離してください。
3. 試験中に試験用紙の印刷が不鮮明な箇所や汚れなどに気づいた場合は、監督者に申し出てください。
4. 監督者の指示に従って、記述式解答用紙(4枚)の受験番号の記入欄に受験番号をそれぞれ**2カ所(計8カ所)**記入してください。
5. 解答はすべて**HBの黒鉛筆**または**HB・0.5 mm以上の芯のシャープペンシル**で記入してください。
6. 解答用紙は丁寧に取り扱いってください。
7. 解答は、解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
8. 解答中以外の解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
9. 受験中は不審な行動をとってはいけません。不正行為があれば全科目を無効とします。
10. 試験時間の途中で退場することはできません。
ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、監督者に申し出てください。
11. 試験終了の合図と同時に解答をやめてください。
12. 問題用紙は試験終了後、持ち帰ってください。

各問題の解答は、解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること。

枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は、採点の対象にはならない。

〔1〕

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

- (1) x の2次方程式 $x^2 - (2a + 2)x + 2a^2 + a - 1 = 0$ が異なる2つの実数解を持つような実数の定数 a の値の範囲は ア である。これらの実数解を α, β とすると、 $(\alpha - \beta)^2 =$ イ (イ は a の多項式) と表される。したがって、 a が ア の範囲を動くとき、 $(\alpha - \beta)^2$ の最大値は ウ である。

- (2) 実数 x, y が等式

$$\log_{10} y = 2 \log_{10} (3 - x) - \log_{10} (2 - x) \quad \cdots \cdots (*)$$

を満たすとする。右辺の2つの対数がともに定義されるための条件は $x <$ エ である。

(*) を y について解くと、 $y =$ オ $+$ $\frac{1}{$ カ $（$ オ , カ は x の1次式 $）$ となる。 y の値が最小になるときの x の値は キ である。

- (3) 関数 $f(x) = \tan 2x$ の導関数は $f'(x) =$ ク である。また、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\left(\frac{\pi}{8}, f\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ における接線の方程式は $y =$ ケ $x +$ コ (ケ , コ は定数) である。

[2]

座標空間内に3点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, 0)$, $B(0, -2, 0)$ があり, 点 $P(x, y, z)$ が

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

を満たしながら動いている. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) x, y, z が満たす方程式を求めよ. また, y のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) $|\overrightarrow{AP}|$ を y のみの式で表せ.
- (3) 2つのベクトルの大きさの積 $|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{BP}|$ の最大値と最小値を求めよ. また, 最小値をとるとき
の点 P の座標を求めよ.

[3]

Oを原点とする座標平面上に点 $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(0, 3)$ をとり, θ を $0 < \theta < \pi$ を満たす実数とする. $AP = 1$, $\angle OAP = \theta$ を満たす第2象限内の点をPとし, $BQ = 1$, $\angle QBC = \theta$ を満たす第1象限内の点をQとすると, 次の問いに答えよ.

- (1) 点P, Qの座標を $\cos \theta$, $\sin \theta$ を用いて表せ.
- (2) 2点P, Q間の距離の最大値・最小値およびそのときの θ の値を求めよ.
- (3) $\triangle OPQ$ の面積 S を $\cos \theta$ を用いて表せ. また, S の最大値およびそのときの θ の値を求めよ.

[4]

1以上の整数 n に対して,

$$a_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}, \quad J_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx, \quad K_n = a_n J_n$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を n の式で表せ.

(2) K_1, K_2 を求めよ. また, $\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx$ を J_{n+1} と J_n を用いて表せ.

(3) $J_{n+1} = \int_0^1 (x)' \cdot (1-x^2)^{n+1} dx$ に部分積分法を適用して, J_{n+1} を J_n を用いて表せ. また, $\frac{K_{n+1}}{K_n}$ を求めよ.

(4) K_n と J_n を n の式で表せ.

(5) $L_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} {}_n C_k = {}_n C_0 - \frac{1}{3} {}_n C_1 + \frac{1}{5} {}_n C_2 - \frac{1}{7} {}_n C_3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} {}_n C_n$ とおく. このとき, L_n が J_n に等しいことを示せ.

—— このページは白紙です。 ——

—— このページは白紙です。 ——

——— このページは白紙です。 ———