

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$\frac{5}{6}$	$\frac{\sqrt{11}}{6}$	$\frac{21\sqrt{11}}{4}$	$\frac{15\sqrt{11}}{11}$	$\frac{\sqrt{11}}{2}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	36	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{29}{36}$	$\frac{13}{18}$

【解説】

(1)

AB=7, BC=5, CA=9 の△ABCにおいて、余弦定理を用いると $\cos A$ の値は、

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2AB \cdot CA} \\ &= \frac{49 + 81 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 9} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

と求まる。また、 $0 < A < 180^\circ$ より $\sin A > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{\frac{11}{36}} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{6}\end{aligned}$$

となる。このとき、△ABCの面積を S とおくと、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}AB \cdot CA \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \\ &= \frac{21\sqrt{11}}{4}\end{aligned}$$

である。また、△ABCの外接円の半径を R とおくと、正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin A} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= \frac{5}{2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}} \\ \therefore R &= \frac{15\sqrt{11}}{11}\end{aligned}$$

と求まる。さらに、△ABCの内接円の半径を r とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r(AB + BC + CA) &= S \\ \Leftrightarrow \frac{21}{2}r &= \frac{21\sqrt{11}}{4} \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{11}}{2}\end{aligned}$$

である。

(2)

a, b ともに1~6までの6通りであるから、2次関数 $f(x) = x^2 + 2ax + b$ は全部で

$$6 \cdot 6 = 36 \text{ 通り}$$

ある。ここで、 $f(1) = 2a + b + 1$ の値が偶数となるのは、 $b + 1$ が偶数となるとき、すなわち

$b = 1, 3, 5$ のときであるから、その場合の数は

$$6 \cdot 3 = 18 \text{ 通り}$$

ある。よって、 $f(1) = 2a + b + 1$ の値が偶数となる確率は

$$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

である。次に、 $f(x)$ の最小値が2以上になる確率を考える。 $f(x)$ は

$$f(x) = (x + a)^2 + b - a^2$$

と変形できるから、 $f(x)$ の最小値が2以上になる条件は

$$b - a^2 \geq 2 \qquad \cdots \text{①}$$

となることである。①を b の値で場合分けして考えると、 $a^2 > 0$ であるから、 $b = 1, 2$ のときは①を満たす a の値は存在しない。また、 $b = 3, 4, 5$ のときは $a = 1$ が①を満たし、 $b = 6$ のときは $a = 1, 2$ が①を満たす。よって、 $f(x)$ の最小値が2以上になる場合の数は5通りであるから、その確率は

$$\frac{5}{36}$$

である。さらに、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもつ確率を考える。 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもつ条件は

$$b - a^2 \leq 0 \qquad \cdots \text{②}$$

となることである。②を a の値で場合分けして考えると、 $a = 1$ のときは $b = 1$ が、 $a = 2$ のときは $b = 1, 2, 3, 4$ が、 $a = 3, 4, 5, 6$ のときは b の値に関わらず②を満たす。よって、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもつ場合の数は

$$1 + 4 + 4 \cdot 6 = 29 \text{ 通り}$$

であるから、その確率は

$$\frac{29}{36}$$

である。最後に、 $f(x) = 0$ が -3 より小さい解と大きい解を1つずつもつような確率を考える。 $f(x) = 0$ が -3 より小さい解と大きい解を1つずつもつ条件は

$$\begin{aligned}f(-3) &< 0 \\ \Leftrightarrow 9 - 6a + b &< 0 \\ \Leftrightarrow b + 9 &< 6a \qquad \cdots \text{③}\end{aligned}$$

となることである。③を a の値で場合分けして考えると、 $a = 1$ のとき③を満たす b の値は存在せず、 $a = 2$ のときは $b = 1, 2$ が、 $a = 3, 4, 5, 6$ のときは b の値に関わらず③を満たす。よって、 $f(x) = 0$ が -3 より小さい解と大きい解を1つずつもつ場合の数は

$$2 + 4 \cdot 6 = 26 \text{ 通り}$$

であるから、その確率は

$$\frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

である。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	-7	$-2-\sqrt{7}$	$-2+\sqrt{7}$	1	$3-\sqrt{7}$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$-5n+65$	$-5(2n^2-27n+13)$	$-\frac{5}{6}n(4n^2-75n-1)$	13	12

〔解説〕

(1)

問題文中の①式を変形すると、

$$(x-2)^2+(y-1)^2=k+7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

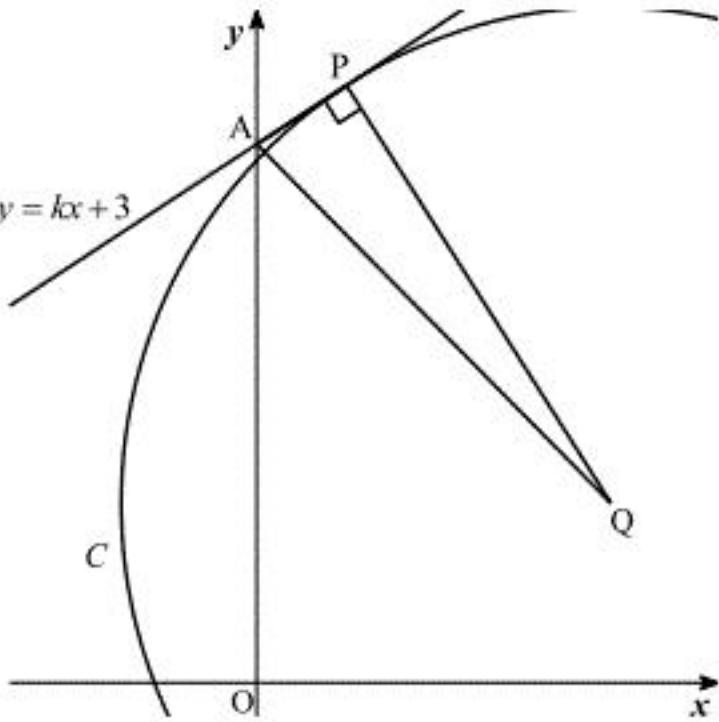
と表せる。よって、上式が円を表す条件は、

$$\begin{aligned} k+7 &> 0 \\ \therefore k &> -7 \end{aligned}$$

である。②式の表す円 C と直線 $\ell: y=kx+3$ が接する条件は、円 C の中心 $(2, 1)$ と直線 $\ell: kx-y+3=0$ との距離が円 C の半径 $\sqrt{k+7}$ と一致すること、すなわち

$$\begin{aligned} \frac{|2k-1+3|}{\sqrt{k^2+1}} &= \sqrt{k+7} \\ \Leftrightarrow 4(k+1)^2 &= (k+7)(k^2+1) \\ \Leftrightarrow k^3+3k^2-7k+3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-1)(k^2+4k-3) &= 0 \\ \therefore k &= 1, -2 \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

となることである。ここで、 k の解の大小関係は $-2-\sqrt{7} < -2+\sqrt{7} < 1$ である。 $k=-2+\sqrt{7}$ のとき、 C の中心を Q とおくと、 C と ℓ の接点 P と直線 ℓ 上の点 $A(0, 3)$ と点 $Q(2, 1)$ でできる $\triangle APQ$ は以下の図のような $\angle APQ = 90^\circ$ の直角三角形となる。



PQ は C の半径であるから、

$$PQ = \sqrt{k+7} = \sqrt{5+\sqrt{7}}$$

となるため、 AP^2 の値は

$$\begin{aligned} AP^2 &= AQ^2 - PQ^2 \\ &= (0-2)^2 + (3-1)^2 - (5+\sqrt{7}) \\ &= 3-\sqrt{7} \end{aligned}$$

である。

(2)

与えられた漸化式の両辺を $(2n-1)(2n+1)$ で割ると、 $b_n = \frac{a_n}{2n-1}$ より、

$$\begin{aligned} (2n-1)a_{n+1} - (2n+1)a_n &= 5(1-4n^2) \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2n+1} - \frac{a_n}{2n-1} &= -5 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n &= -5 \end{aligned}$$

と数列 $\{b_n\}$ についての漸化式が得られる。上式より、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{a_1}{2-1} = 60$ 、公差 -5 の等差数列であるから、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= 60 - 5(n-1) \\ &= -5n + 65 \end{aligned}$$

である。従って、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= (2n-1)b_n \\ &= -5(2n-1)(n-13) \\ &= -5(2n^2-27n+13) \end{aligned}$$

となり、 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= -5 \sum_{k=1}^n (2k^2 - 27k + 13) \\ &= -5 \left\{ \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{27n(n+1)}{2} + 13n \right\} \\ &= -\frac{5}{6}n \{ 2(n+1)(2n+1) - 81(n+1) + 78 \} \\ &= -\frac{5}{6}n(4n^2 - 75n - 1) \end{aligned}$$

と表される。また、

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ \Leftrightarrow -5(2n-1)(n-13) &= 0 \\ \therefore n &= 13 \end{aligned}$$

であるから、 $S_n = S_{n+1}$ となるのは $n=12$ のときである。

[3]

(1)

放物線 $C: y = 3x^2$ 上の 2 点 $A(t, 3t^2)$, $B(t+a, 3(t+a)^2)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y - 3t^2 &= \frac{3(t+a)^2 - 3t^2}{t+a-t}(x-t) \\ \therefore y &= 3(2t+a)x - 3t^2 - 3at \end{aligned}$$

と表される。よって、 C と ℓ で囲まれる図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_t^{t+a} \{3(2t+a)x - 3t^2 - 3at - 3x^2\} dx \quad (\because a > 0) \\ &= -3 \int_t^{t+a} (x-t) \{x-(t+a)\} dx \\ &= -3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (t+a-t)^3 \\ &= \frac{a^3}{2} \end{aligned}$$

である。 $S=4$ であるから、 a の値は

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{a^3}{2} \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a=2$

(2)

点 $P(X, Y)$ とおくと、点 P は線分 AB を $1:2$ に内分する点であるから、

$$X = \frac{2t+t+a}{3} = t + \frac{2}{3} \quad \dots\dots ①$$

$$Y = \frac{2 \cdot 3t^2 + 3(t+a)^2}{3} = 3t^2 + 4t + 4 \quad \dots\dots ②$$

となる。①より、 $t = X - \frac{2}{3}$ であるから、これを②に代入して

$$\begin{aligned} Y &= 3\left(X - \frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(X - \frac{2}{3}\right) + 4 \\ &= 3X^2 + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

を得る。 t が実数全体を動くため、①より X も実数全体を動く。よって、点 P の軌跡は、

放物線 $y = 3x^2 + \frac{8}{3}$ である。

(答) 放物線 $y = 3x^2 + \frac{8}{3}$

(3)

放物線 $C: y = 3x^2$ と直線 $y = 3$ との交点の x 座標の値は

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 3 \\ \therefore x &= \pm 1 \end{aligned}$$

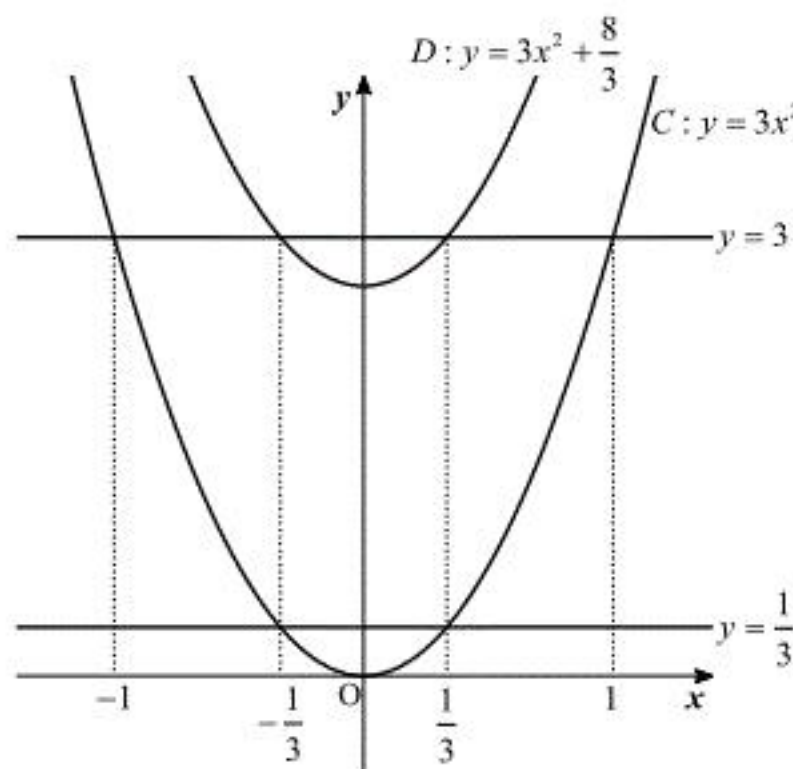
であり、放物線 $C: y = 3x^2$ と直線 $y = \frac{1}{3}$ との交点の x 座標の値は

$$\begin{aligned} 3x^2 &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{9} \\ \therefore x &= \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であり、放物線 $D: y = 3x^2 + \frac{8}{3}$ と直線 $y = 3$ との交点の x 座標の値は、

$$\begin{aligned} 3x^2 + \frac{8}{3} &= 3 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{9} \\ \therefore x &= \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。以上より、以下の図のようになっている。



$S_1 - S_2 - S_3$ の値は

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 - S_3 &= \int_{-1}^1 (3 - 3x^2) dx - \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} - 3x^2\right) dx - \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \left\{3 - \left(3x^2 + \frac{8}{3}\right)\right\} dx \\ &= \frac{3}{6} \{1 - (-1)\} - \frac{3}{6} \left\{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^3 - \frac{3}{6} \left\{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^3 \\ &= 4 - 2 \cdot \frac{4}{27} \\ &= \frac{100}{27} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S_1 - S_2 - S_3 = \frac{100}{27}$