

【1】

【解答】

- (1) ア π イ 2 ウ $\pi+2$
- (2) エ 2 オ 3 カ $\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}$
- (3) キ 2 ク 0 ケ 5 コ -3

【解説】

(1)

$$x=2\sin\theta$$

とおくと、

$$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$$

x	0	$\rightarrow$	2
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

である。このとき、与えられた定積分の値はそれぞれ、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-(2\sin\theta)^2} \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos 2\theta + 1) d\theta \\ &= [\sin 2\theta + 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi \\ J &= \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\theta}{\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}} \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta d\theta \\ &= [-2\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \\ K &= \int_0^2 \frac{4+x-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_0^2 \left(\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx \\ &= I + J \\ &= \pi + 2 \end{aligned}$$

と求めることができる。

(2)

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ を } a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+3} \text{ に代入すると、}$$
$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{\frac{1}{b_n}}{\frac{2}{b_n} + 3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2+3b_n}$$
$$\Leftrightarrow b_{n+1} = 3b_n + 2$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} b_{n+1} + 1 &= (3b_n + 2) + 1 \\ &= 3(b_n + 1) \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} b_1 + 1 &= \frac{1}{a_1} + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

であるから数列 $\{b_n + 1\}$ は初項2、公比3の等比数列であることが分かる。したがって、

$$\begin{aligned} b_n + 1 &= 2 \cdot 3^{n-1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} &= 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \\ \therefore a_n &= \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1} - 1} \quad (\because 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \neq 0) \end{aligned}$$

を得る。

(3)

与式の両辺に $x(x-2)^3$ をかけると、

$$2x^3 - 7x^2 + 11x - 16 = a(x-2)^3 + bx(x-2)^2 + cx(x-2) + dx \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①は x についての恒等式であるから、両辺に $x=0$ を代入することで

$$\begin{aligned} -16 &= a(-2)^3 \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

であることが分かり、 $x=2$ を代入することで

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 16 &= d \cdot 2 \\ \therefore d &= -3 \end{aligned}$$

であることが分かる。これらを①に代入すると

$$\begin{aligned} 2x^3 - 7x^2 + 11x - 16 &= a(x-2)^3 + bx(x-2)^2 + cx(x-2) + dx \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 7x^2 + 11x - 16 &= 2(x-2)^3 + bx(x-2)^2 + cx(x-2) - 3x \end{aligned}$$

となるので、上式の両辺に $x=-1$ を代入することで

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 11 \cdot (-1) - 16 &= 2(-1-2)^3 - b(-1-2)^2 - c(-1-2) - 3 \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow 3b - c &= -5 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であることが分かり、 $x=1$ を代入することで

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 16 &= 2(1-2)^3 + b(1-2)^2 + c(1-2) - 3 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow b - c &= -5 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であることが分かる。②、③より

$$\begin{cases} 3b - c = -5 \\ b - c = -5 \end{cases}$$
$$\therefore b = 0, c = 5$$

であることが分かるので、題意を満たす定数 a, b, c, d は

$$a = 2, b = 0, c = 5, d = -3$$

である。

【2】

【解答】

ア	1	イ	$\frac{5}{8}$	ウ	$\left(\frac{1}{4}\right)^n$
エ	$n\left(\frac{1}{4}\right)^n$	オ	$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$	カ	$\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$
キ	$n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^n$	ク	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n$	ケ	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n$
コ	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n$				

【解説】

仮定より明らかに $P_1 = 1$ である。 $S_2 > 3$ となるのは1回目と2回目の引いたカードの組み合わせが $(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)$ のときであり、その確率は

$$\frac{6}{4^2} = \frac{3}{8}$$

となる。よって余事象の確率を考えて

$$\begin{aligned} P_2 &= 1 - \frac{3}{8} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

となる。以下、 $n \geq 3$ について考える。 $S_n = 0$ となるのは n 回すべて0を引くときであるから確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

となる。 $S_n = 1$ となるのは1回だけ1を引いて残りの $n-1$ 回は0を引くときであるから確率は

$${}_nC_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = n\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

である。0が $n-2$ 回出て $S_n = 2$ となるとき、残りのカードは1が2枚であるからその確率は

$${}_nC_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

となる。よって $S_n = 2$ となる確率は

$$n\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

である。0が $n-2$ 回出て $S_n = 3$ となるとき、残りのカードは1と2が1枚ずつであるからその確率は

$${}_nP_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n = n(n-1) \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

となる。0が $n-3$ 回出て $S_n = 3$ となるとき、残りのカードは1が3枚であるからその確率は

$${}_nC_3 \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

となる。よって $S_n = 3$ となる確率は

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{4}\right)^n + n(n-1) \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n &= n \cdot \frac{6 + 6(n-1) + (n-1)(n-2)}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= n \cdot \frac{n^2 + 3n + 2}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

である。以上より

$$\begin{aligned} P_n &= \left(\frac{1}{4}\right)^n + n\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{6 + 6n + 3n(n+1) + n(n+1)(n+2)}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

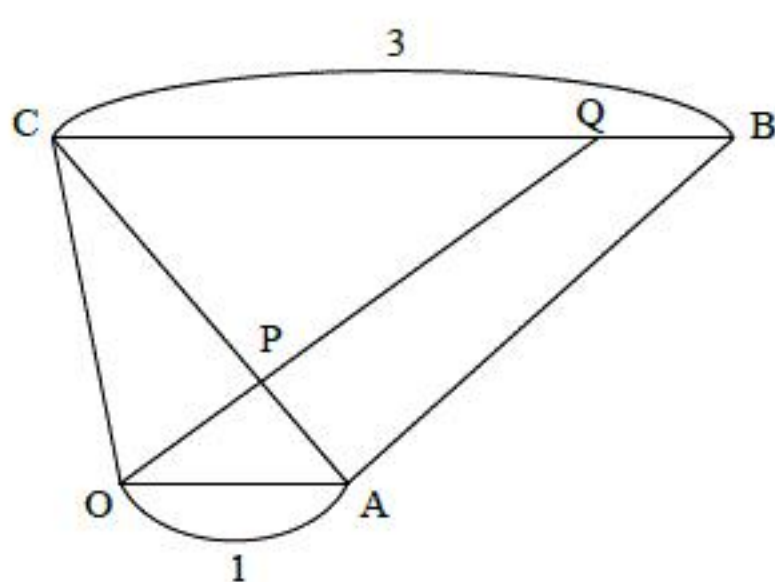
となる。これは $n=1, 2$ でも成り立つ。

〔3〕

〔解答〕

ア	$\vec{c}-\vec{a}$	イ	$(1-t)\vec{a}+t\vec{c}$	ウ	$\frac{1-t}{t}\vec{a}+\vec{c}$
エ	$x^2+\frac{9}{4}$	オ	$tx^2+(1-2t)x+\frac{13}{4}t-1$	カ	$\frac{1}{4}$
キ	$\frac{1}{5}$	ク	$\frac{1}{2}$	ケ	$-\frac{7}{2}$
コ	$-\frac{7\sqrt{58}}{58}$				

〔解説〕



題意より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ &= \vec{c} - \vec{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} \\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{c}\end{aligned}$$

となる。また、OA と CQ は平行であるから、 $\triangle OPA$ と $\triangle QPC$ は相似である。よって

$$\begin{aligned}OP:PQ &= AP:PC = t:1-t \\ \therefore OQ &= \frac{1}{t}OP\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{t}\overrightarrow{OP} \\ &= \frac{1-t}{t}\vec{a} + \vec{c}\end{aligned}$$

となる。また、 $\triangle OAC$ の面積が $\frac{3}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c})^2} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} &= \sqrt{|\vec{c}|^2 - x^2} \\ \therefore |\vec{c}|^2 &= x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= x^2 + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OP} &= (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \{(1-t)\vec{a} + t\vec{c}\} \\ &= -(1-t)|\vec{a}|^2 + (1-2t)\vec{a} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 \\ &= -(1-t) + (1-2t)x + t\left(x^2 + \frac{9}{4}\right) \\ &= tx^2 + (1-2t)x + \frac{13}{4}t - 1\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1-t}{t}\vec{a} - \vec{c}\end{aligned}$$

であり、点 Q が点 B に一致するとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CQ} &= \overrightarrow{CB} \\ &= 3\vec{a}\end{aligned}$$

となるので、このとき

$$\frac{1-t}{t} = 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

である。また、点 Q が線分 CB を 4:1 に外分するとき、

$$\begin{aligned}CB:CQ &= (4-1):4 \\ &= 3:4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{CQ} &= \frac{4}{3}\overrightarrow{CB} \\ &= 4\vec{a}\end{aligned}$$

となるので、 t の値は

$$\frac{1-t}{t} = 4 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{5}x^2 + \left(1-2 \cdot \frac{1}{5}\right)x + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{5} - 1 \\ &= \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{7}{20}\end{aligned}$$

であるから、 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{OP}$ となるのは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{7}{20} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x+7)(2x-1) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\end{aligned}$$

のときである。また、 $\angle AOC$ が鈍角になるとき $\cos \angle AOC < 0$ より $x = \vec{a} \cdot \vec{c} < 0$ であるから

$x = -\frac{7}{2}$ となる。このとき

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2 &= \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} = \frac{58}{4} \\ \Leftrightarrow |\vec{c}| &= \frac{\sqrt{58}}{2}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\cos \angle AOC &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} \\ &= \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{58}}{2}} \\ &= -\frac{7\sqrt{58}}{58}\end{aligned}$$

である。

〔4〕

(1)

関数 $f(x) = (x+1)e^{-ax^2}$ の導関数を計算すると

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x+1)' e^{-ax^2} + (x+1)(e^{-ax^2})' \\&= e^{-ax^2} + (x+1)(-2ax)e^{-ax^2} \\&= -(2ax^2 + 2ax - 1)e^{-ax^2} \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となるから、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線の式は

$$\begin{aligned}y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\&= -(4a-1)e^{-a}(x-1) + 2e^{-a} \\&= -(4a-1)e^{-a}x + (4a+1)e^{-a}\end{aligned}$$

である。この直線が原点を通るとき、接線の式に $x=y=0$ を代入することにより a の値は

$$\begin{aligned}0 &= 0 + (4a+1)e^{-a} \\ \therefore a &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{1}{4}$$

(2)

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるためには $f'(1)=0$ が必要である。よって、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned}f'(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(4a-1)e^{-a} &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

であることが必要であるとわかる。逆に $a = \frac{1}{4}$ のとき、 $\textcircled{1}$ より導関数 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{2}(x^2+x-2)e^{-\frac{1}{4}x^2} \\&= -\frac{1}{2}(x+2)(x-1)e^{-\frac{1}{4}x^2}\end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって、 $a = \frac{1}{4}$ のとき $f(x)$ は $x=1$ で極値をもつことがわかり、このとき $f(x)$ は

$$x=-2 \text{ において、極小値 } f(-2) = -\frac{1}{e}$$

$$x=1 \text{ において、極大値 } f(1) = 2e^{-\frac{1}{4}}$$

をとることがわかる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{4}, \text{ 極小値 } -\frac{1}{e} (x=-2), \text{ 極大値 } 2e^{-\frac{1}{4}} (x=1)$$

(3)

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は $f'(x)=0$ を満たす実数 x が存在し、その x の前後で $f'(x)$ の符号が変化することである。 $\textcircled{1}$ より

$$f'(x) = -(2ax^2 + 2ax - 1)e^{-ax^2}$$

であり、 e^{-ax^2} は常に正であるから $2ax^2 + 2ax - 1$ の符号変化について考えればよい。関数 $g(x)$ を

$$g(x) = 2ax^2 + 2ax - 1$$

とおくと、 $a=0$ のとき $g(x)=1$ であるから $f'(x)=0$ となる x は存在せず、 $f(x)$ は極値をもたない。 $a \neq 0$ のとき $g(x)$ は2次関数となるから、 $g(x)=0$ の判別式を D とすると $g(x)=0$ を満たす実数 x が存在するのは

$$\frac{D}{4} \geq 0$$

となるときである。ここで $g(x)=0$ の解を α, β とおくと、 $\alpha = \beta$ のとき

$$g(x) = 2a(x-\alpha)^2$$

となり $x=\alpha$ の前後で符号が変化しないため $f(x)$ は極値を持たない。一方 $\alpha \neq \beta$ のとき

$$g(x) = 2a(x-\alpha)(x-\beta)$$

は $x=\alpha$ の前後で符号が変化する。したがって、求める条件は

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a &> 0 \\ \Leftrightarrow a &< -2, 0 < a\end{aligned}$$

であり、これは $a \neq 0$ を満たす。

$$(\text{答}) \quad a < -2, 0 < a$$

(4)

関数 $h(x)$ を $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1\end{aligned}$$

であることから $h(x)$ が $x \neq -1$ で定義されていることに注意して導関数 $h'(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned}h'(x) &= \left(\frac{1}{f(x)} \right)' \\&= \frac{-f'(x)}{\{f(x)\}^2} \\&= \frac{-e^{-ax^2}}{\{f(x)\}^2} g(x)\end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{-e^{-ax^2}}{\{f(x)\}^2}$ は常に負であることに注意すると、(3)と同様に $g(x)$ ($x \neq -1$) の符号

変化を考えればよいことになる。さらに、任意の実数 a に対して

$$g(-1) = 1$$

となることから、 $x=-1$ は方程式 $g(x)=0$ の解とはならないため、(3)と同様の議論により

$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲は $a < -2, 0 < a$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad a < -2, 0 < a$$