

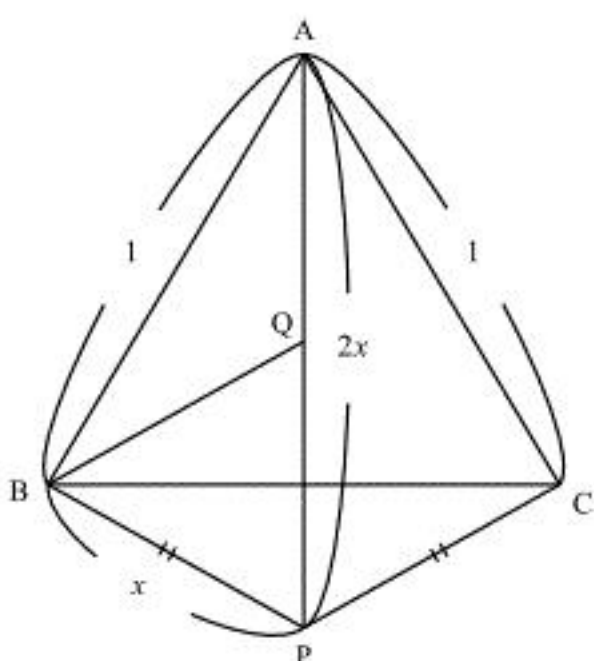
【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	30	$2\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	90	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	21	20	14	27	175

【解説】

(1)



△PABと△PACについて、3辺の長さがそれぞれ等しいので、

$$\triangle PAB = \triangle PAC$$

が成り立つ。よって、点Pは∠BACの二等分線上にある。また、PB<PAより点Pは点Aから見て辺BCと同じ側にあることに注意すると、

$$\angle PAB = \angle PAC$$

であることと、

$$\angle BAC = 60^\circ$$

であることから、

$$\angle PAB = 30^\circ$$

となる。また、PB=xとおくと、PA=2xであるから、△ABPに余弦定理を用いることで、

$$x^2 = (2x)^2 + 1^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

を得る。したがって、

$$PA = \frac{2}{\sqrt{3}}, PB = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから、△PABは∠ABP=90°の直角三角形である。また、BP=PQ= $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 、∠QPB=60°

より、△BPQは一辺 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の正三角形であるから、

$$QB = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である。

(2)

$a=b \leq c$ となるのは、 $a=b=k$ ($1 \leq k \leq 6$)のとき c が $k \sim 6$ の $7-k$ 通りあることから、

$$\sum_{k=1}^6 (7-k) = 42 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21 \text{ 通り}$$

である。また、 $a < b < c$ となるのは、1～6から選んだ異なる3つの数を小さい順に a, b, c とあてはめることを考えて、

$${}_6C_3 = 20 \text{ 通り}$$

である。 $ab=c$ となるときは、 c の値で場合分けして考える。

[1] $c=1$ のとき

$$(a, b) = (1, 1)$$

の1通りである。

[2] $c=2$ のとき

$$(a, b) = (1, 2), (2, 1)$$

の2通りである。

[3] $c=3$ のとき

$$(a, b) = (1, 3), (3, 1)$$

の2通りである。

[4] $c=4$ のとき

$$(a, b) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$$

の3通りである。

[5] $c=5$ のとき

$$(a, b) = (1, 5), (5, 1)$$

の2通りである。

[6] $c=6$ のとき

$$(a, b) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$$

の4通りである。

以上[1], [2], [3], [4], [5], [6]より、

$$1+2+2+3+2+4=14 \text{ 通り}$$

である。また、 $ab < c$ となる場合は以下の通りである。

[1] $c=2$ のとき

$$ab=1 \text{ であればよいから、1通りである。}$$

[2] $c=3$ のとき

$$ab=1, 2 \text{ であればよいから、}$$

$$1+2=3 \text{ 通り}$$

である。

[3] $c=4$ のとき

$$ab=1, 2, 3 \text{ であればよいから、}$$

$$1+2+2=5 \text{ 通り}$$

である。

[4] $c=5$ のとき

$$ab=1, 2, 3, 4 \text{ であればよいから、}$$

$$1+2+2+3=8 \text{ 通り}$$

である。

[5] $c=6$ のとき

$$ab=1, 2, 3, 4, 5 \text{ であればよいから、}$$

$$1+2+2+3+2=10 \text{ 通り}$$

である。

以上[1], [2], [3], [4], [5]より、

$$1+3+5+8+10=27 \text{ 通り}$$

である。目の出方は全部で $6^3=216$ 通りであるから、 $ab > c$ となるのは、

$$216-14-27=175 \text{ 通り}$$

である。

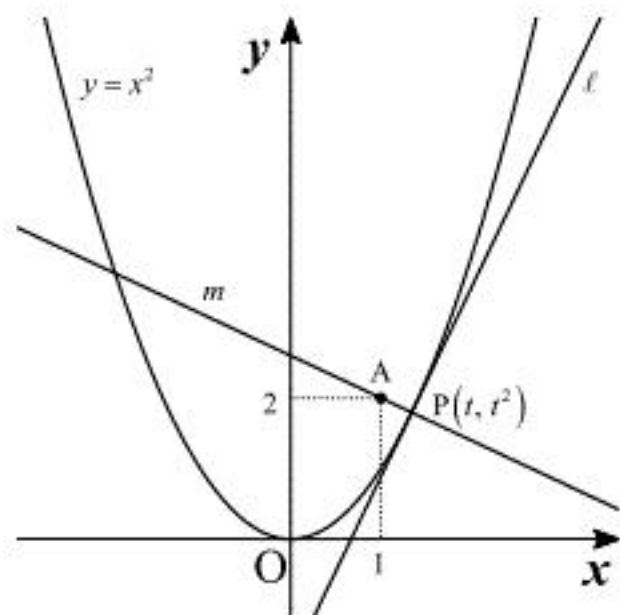
〔2〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$2t$	$\frac{t^2-2}{t-1}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	3	11	$\frac{23}{77}$	$2\sqrt{6}$	$-\frac{1}{3}$

〔解説〕

(1)



放物線 $y = x^2$ について、

$$y' = 2x$$

であるから、点 $P(t, t^2)$ における接線の傾きは $2t$ である。また、 $t \neq 1$ のとき直線 m の傾きは、

$\frac{t^2-2}{t-1}$ である。 ℓ が m と直交するとき、

$$\begin{aligned} 2t \cdot \frac{t^2-2}{t-1} &= -1 \\ \Leftrightarrow 2t^3 - 3t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(2t^2 - 2t - 1) &= 0 \end{aligned}$$

であるから、これを解くと小さい方から、

$$t = -1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 &= 7^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 &= 49 \\ \Leftrightarrow 5^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \cdot 3^2 &= 49 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 121 \\ \therefore |2\vec{a} + \vec{b}| &= 11 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} - 2\vec{b}| |2\vec{a} + \vec{b}|} \\ &= \frac{2|\vec{a}|^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2}{7 \cdot 11} \\ &= \frac{23}{77} \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} |\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 9t^2 + 6t + 25 \\ &= 9\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + 24 \end{aligned}$$

であるから、 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ は $t = -\frac{1}{3}$ のとき最小値 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ をとることがわかる。

[3]

(1)

放物線 $y = -x^2 + 2x$ と直線 $y = 2x - 2t$ の共有点の x 座標は、

$$-x^2 + 2x = 2x - 2t$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2t$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{2t}$$

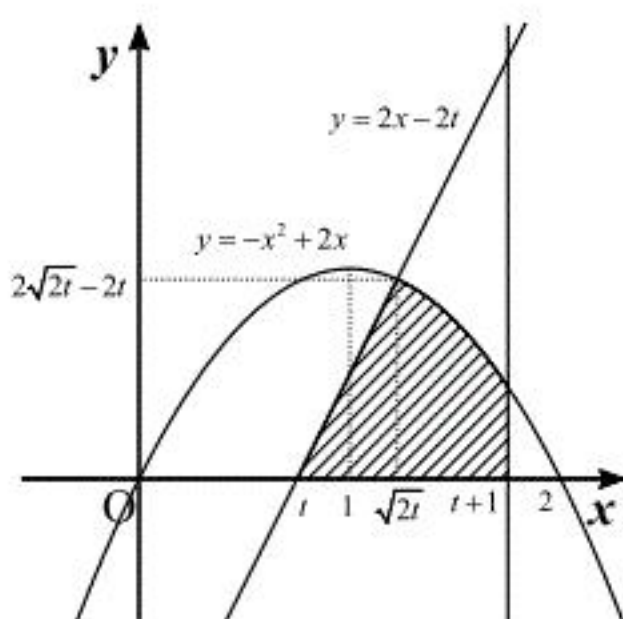
であるから、共有点は $(-\sqrt{2t}, -2\sqrt{2t} - 2t), (\sqrt{2t}, 2\sqrt{2t} - 2t)$ である。

$$(\text{答}) \quad (-\sqrt{2t}, -2\sqrt{2t} - 2t), (\sqrt{2t}, 2\sqrt{2t} - 2t)$$

(2)

S は t の値によって以下のように場合分けして考えることができる。

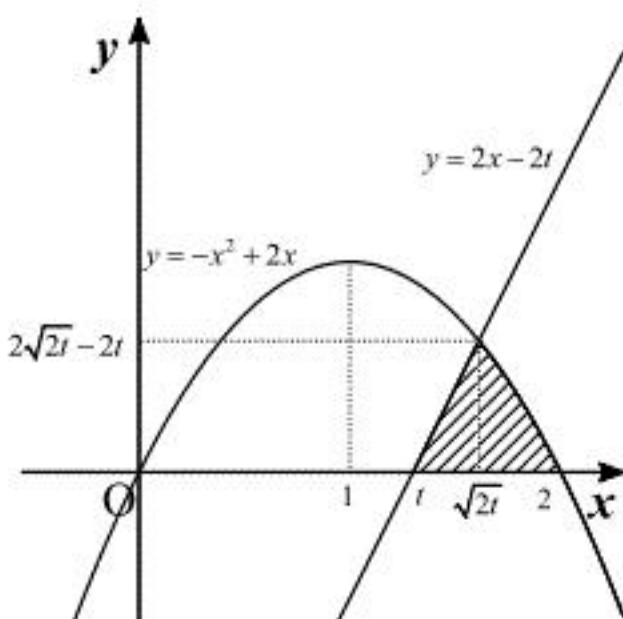
[1] $0 \leq t < 1$ のとき



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(\sqrt{2t} - t)(2\sqrt{2t} - 2t) + \int_{\sqrt{2t}}^{t+1} (-x^2 + 2x) dx \\ &= (\sqrt{2t} - t)^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{\sqrt{2t}}^{t+1} \\ &= \frac{1}{3} \left(-t^3 + 3t^2 - 4\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}} + 3t + 2 \right) \end{aligned}$$

である。

[2] $1 \leq t < 2$ のとき



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(\sqrt{2t} - t)(2\sqrt{2t} - 2t) + \int_{\sqrt{2t}}^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= (\sqrt{2t} - t)^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{\sqrt{2t}}^2 \\ &= \frac{1}{3} \left(3t^2 - 4\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}} + 4 \right) \end{aligned}$$

である。

[3] $t \geq 2$ のとき

D_1 と D_2 の共通部分は存在しないから、

$$S = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(-t^3 + 3t^2 - 4\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}} + 3t + 2 \right) & (0 \leq t < 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{3} \left(3t^2 - 4\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}} + 4 \right) & (1 \leq t < 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (t \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$