

【1】

【解答】

- (1) ア $\frac{2k-1}{k+1}$ イ $\frac{2k-3}{k-1}$ ウ -1
- エ 1 オ $-\frac{(k-2)^2}{k^2-1}$
- (2) カ $\frac{52}{81}$ キ 0 ク $\frac{40}{243}$
- ケ $\frac{4}{27}$ コ $\frac{10}{243}$

【解説】

(1)

k は $k^2 \neq 1$ を満たす実数より、 $k \neq \pm 1$ となる。 ℓ_1 と ℓ_2 の交点 A の x 座標は、

$$\begin{aligned}x-1 &= -x+1 \\ \therefore x &= 1\end{aligned}$$

である。同様にして、 ℓ_2 と ℓ_3 の交点 B の x 座標は、

$$\begin{aligned}-x+1 &= kx-2k+2 \\ \Leftrightarrow (k+1)x &= 2k-1 \\ \therefore x &= \frac{2k-1}{k+1} \quad (\because k \neq -1)\end{aligned}$$

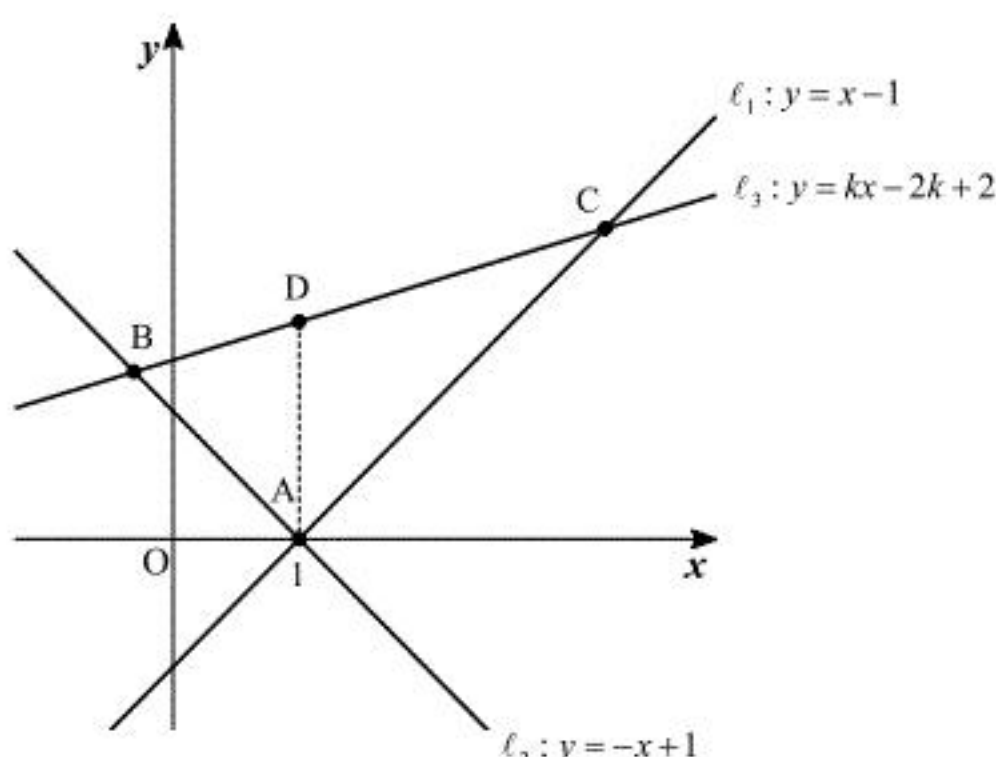
であり、 ℓ_1 と ℓ_3 の交点 C の x 座標は、

$$\begin{aligned}x-1 &= kx-2k+2 \\ \Leftrightarrow (k-1)x &= 2k-3 \\ \therefore x &= \frac{2k-3}{k-1} \quad (\because k \neq 1)\end{aligned}$$

である。また、直線 ℓ_3 は、

$$y = k(x-2)+2$$

となるため、定点 $(2, 2)$ を通る。よって、直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 を図示すると以下のようになる。



ここで、

$$\frac{2k-1}{k+1} < 1 < \frac{2k-3}{k-1}$$

であるとき、上図より交点 B, C はそれぞれ直線 ℓ_2, ℓ_1 上の $y > 0$ の部分に存在する。これを満たす k の値の範囲は上図より、 $-1 < k < 1$ である。また、このとき、直線 ℓ_3 上の点で x 座標が 1 である点を D とすると、D の y 座標は $-k+2$ (> 0) となるため、 $\triangle ABC$ の面積は $AD = -k+2$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot (-k+2) \cdot \left(\frac{2k-3}{k-1} - \frac{2k-1}{k+1} \right) &= \frac{-k+2}{2} \cdot \frac{(2k^2-k-3)-(2k^2-3k+1)}{k^2-1} \\ &= \frac{-k+2}{2} \cdot \frac{2k-4}{k^2-1} \\ &= -\frac{(k-2)^2}{k^2-1}\end{aligned}$$

となる。

(2)

1 個のサイコロを投げて 10 円もらえる確率は 3 か 6 の目が出ればよいから $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ であり、10

円払う確率は $\frac{2}{3}$ である。最初 20 円持っている人が、所持金がなくなるまでサイコロ投げを続けるとき、サイコロ投げが 4 回以内に終了する確率について、以下のように場合分けを行う。

[1] 2 回で終わるとき

2 回とも 10 円を払えばよいから、このときの確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

となる。

[2] 3 回で終わるとき

サイコロを奇数回投げて所持金がちょうどなくなることはないから、3 回で終わる確率は 0 である。

[3] 4 回で終わるとき

3 回サイコロ投げを終えた時点で所持金が 10 円となっており、4 回目で 10 円を払えばよい。ここで、3 回サイコロを投げて所持金が 10 円となるのは、3 回のうち 1 回 10 円をもらい 2 回 10 円を払う場合であるが、最初の 2 回で連続して 10 円を払うと 2 回終了してしまう。よって、4 回で終わる確率は、

$$\begin{aligned}({}_3C_1 - 1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} &= 2 \cdot \frac{8}{81} \\ &= \frac{16}{81}\end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2], [3] より、最初 20 円持っている人が、所持金がなくなるまでサイコロ投げを続けるとき、サイコロ投げが 4 回以内に終了する確率は、

$$\frac{4}{9} + 0 + \frac{16}{81} = \frac{52}{81}$$

である。以下、10 円もらう事象を A、10 円払う事象を B として、サイコロ投げを A と B の並べ方で考える。サイコロ投げが 5 回で終了する確率は 0 であり、サイコロ投げを 5 回終えた時点で所持金が 10 円であるには、A が 2 回、B が 3 回出るときの順列を考えればよい。5 回目は必ず B であり、4 回目までに所持金がなくならないように A, B の並べ方を考えると、

$$\begin{aligned}& (A, A, B, B, B), (A, B, A, B, B), (A, B, B, A, B) \\ & (B, A, A, B, B), (B, A, B, A, B)\end{aligned}$$

の 5 通りとなる。よって、サイコロ投げを 5 回終えた時点で所持金が 10 円である確率は、

$$5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{40}{243}$$

である。同様にして、サイコロ投げを 5 回終えた時点で所持金が 30 円であるには、A が 3 回、B が 2 回出るときの順列を考えればよい。5 個の並べ方は $\frac{5!}{3!2!}$ 通りであるが、最初の 2 回で B が連続して続く (B, B, A, A, A) の場合は 4 回以内にサイコロ投げが終了するために除くと、このときの確率は、

$$\begin{aligned}\left(\frac{5!}{3!2!} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 &= 9 \cdot \frac{4}{243} \\ &= \frac{4}{27}\end{aligned}$$

である。同様にして、サイコロ投げを 5 回終えた時点で所持金が 50 円であるには、A が 4 回、B が 1 回出るときの順列を考えればよい。5 個の並べ方は 5 通りであるため、このときの確率は、

$$5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{243}$$

である。

【2】

〔解答〕

$$\begin{array}{lll} (1) \quad \text{ア} & -1 & \text{イ} \quad -\frac{1}{2} & \text{ウ} \quad 2t^2+2\sqrt{3}t+2\sqrt{3}+\frac{3}{2} \\ & \text{エ} \quad \frac{5}{12}\pi & \text{オ} \quad \frac{\pi}{3} & \\ (2) \quad \text{カ} & \frac{1}{3}(\overline{\text{OA}}+\overline{\text{OB}}+\overline{\text{OC}}) & \text{キ} \quad -\frac{1}{3} & \text{ク} \quad \frac{1}{3}\overline{\text{OB}}-\frac{1}{3}\overline{\text{OC}} \\ & \text{ケ} \quad -\frac{1}{18} & \text{コ} \quad 120 & \end{array}$$

〔解説〕

(1)

$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より, $\frac{2}{3}\pi \leq 2\theta \leq \pi$ である. よって, $t = \cos 2\theta$ が取り得る値の範囲は,

$$\cos \frac{2}{3}\pi \leq \cos 2\theta \leq \cos \pi$$

$$\therefore -1 \leq t \leq -\frac{1}{2}$$

となる. このとき, y を t の式で表すと,

$$\begin{aligned} y &= -8\sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4\sqrt{3} \cos^2 \theta + \frac{7}{2} \\ &= -2\sin^2 2\theta + 2\sqrt{3}(1 + \cos 2\theta) + \frac{7}{2} \\ &= -2(1 - \cos^2 2\theta) + 2\sqrt{3}(1 + \cos 2\theta) + \frac{7}{2} \\ &= -2(1 - t^2) + 2\sqrt{3}(1 + t) + \frac{7}{2} \\ &= 2t^2 + 2\sqrt{3}t + 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} y &= 2t^2 + 2\sqrt{3}t + 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ &= 2\left(t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

より, 関数①は $-1 \leq t \leq -\frac{1}{2}$ の範囲では

$$\begin{aligned} t &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \cos 2\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow 2\theta &= \frac{5}{6}\pi \quad (\because \frac{2}{3}\pi \leq 2\theta \leq \pi) \\ \therefore \theta &= \frac{5}{12}\pi \end{aligned}$$

において最小値をとり,

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos 2\theta &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2\theta &= \frac{2}{3}\pi \quad (\because \frac{2}{3}\pi \leq 2\theta \leq \pi) \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

において最大値をとる.

(2)

O_1 は $\triangle ABC$ の重心であり, $\overline{OO_1}$ は $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ を用いて,

$$\overline{OO_1} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

と表せる. また, A_1 は $\triangle OBC$ の重心であるから同様にして,

$$\overline{OA_1} = \frac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC})$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \overline{O_1A_1} &= \overline{OA_1} - \overline{OO_1} \\ &= \frac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC}) - \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) \\ &= -\frac{1}{3}\overline{OA} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表せる. また, 同様にして,

$$\begin{aligned} \overline{O_1B_1} &= -\frac{1}{3}\overline{OB} \\ \overline{O_1C_1} &= -\frac{1}{3}\overline{OC} \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned} \overline{B_1C_1} &= \overline{O_1C_1} - \overline{O_1B_1} \\ &= \frac{1}{3}\overline{OB} - \frac{1}{3}\overline{OC} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である. 与えられた条件のもとで, $\overline{O_1A_1}$ と $\overline{B_1C_1}$ の内積は①と②より

$$\begin{aligned} \overline{O_1A_1} \cdot \overline{B_1C_1} &= -\frac{1}{3}\overline{OA} \cdot \left(\frac{1}{3}\overline{OB} - \frac{1}{3}\overline{OC}\right) \\ &= -\frac{1}{9}\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \frac{1}{9}\overline{OA} \cdot \overline{OC} \\ &= -\frac{1}{9}|\overline{OA}||\overline{OB}|\cos \angle AOB + \frac{1}{9} \times |\overline{OA}||\overline{OC}|\cos \angle COA \\ &= -\frac{1}{9} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + \frac{1}{9} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ \\ &= -\frac{1}{18} \end{aligned}$$

である. また, $\overline{O_1A_1}$ と $\overline{B_1C_1}$ のなす角を θ とすると,

$$\cos \theta = \frac{\overline{O_1A_1} \cdot \overline{B_1C_1}}{|\overline{O_1A_1}||\overline{B_1C_1}|} \quad \dots \textcircled{3}$$

であり, ①, ②より,

$$|\overline{O_1A_1}| = \left| -\frac{1}{3}\overline{OA} \right| = \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} |\overline{B_1C_1}|^2 &= \left| \frac{1}{3}\overline{OB} - \frac{1}{3}\overline{OC} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9}|\overline{OB}|^2 - \frac{2}{9}\overline{OB} \cdot \overline{OC} + \frac{1}{9}|\overline{OC}|^2 \\ &= \frac{1}{9} - \frac{2}{9}|\overline{OB}||\overline{OC}|\cos \angle BOC + \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overline{B_1C_1}| = \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{5}$$

を得る. 以上, ③, ④, ⑤より,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{O_1A_1} \cdot \overline{B_1C_1}}{|\overline{O_1A_1}||\overline{B_1C_1}|} \\ &= \frac{-\frac{1}{18}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 120^\circ \end{aligned}$$

となる.

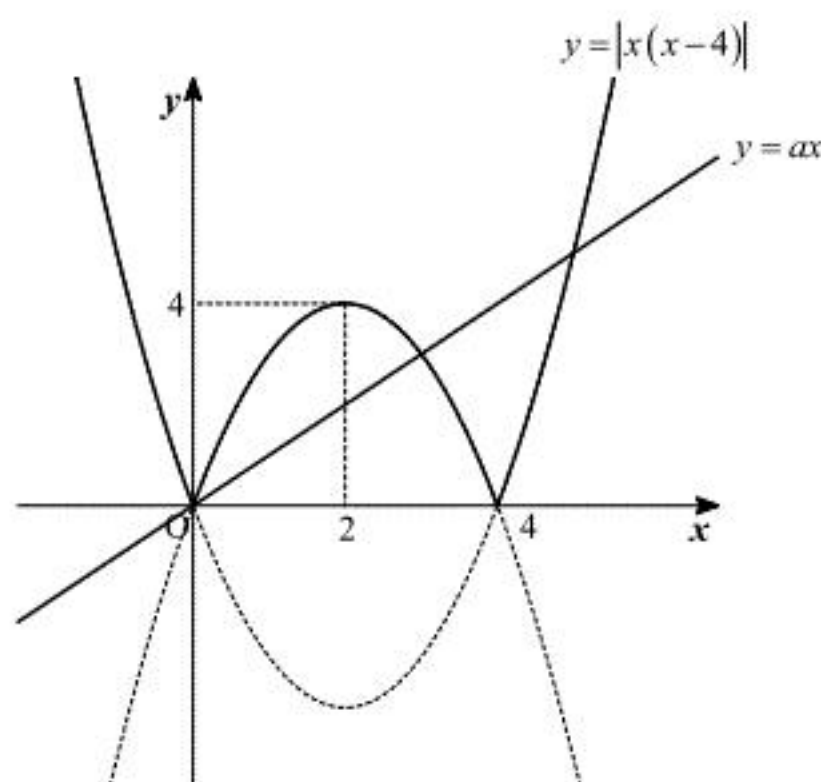
[3]

(1)

曲線 $C: y = |x(x-4)|$ について、 x の範囲に注意して絶対値を外すと

$$y = \begin{cases} x(x-4) & (x < 0, 4 \leq x \text{ のとき}) \\ -x(x-4) & (0 < x < 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となり、曲線 C と直線 ℓ を図示すると以下ようになる。



上図において、直線 ℓ と曲線 C は $x < 0$ の範囲に交点を持たず、 $x = 0$ で交わるため、残りの交点について $x > 0$ の範囲で考えればよい。 $0 < x < 4$ の範囲における直線 ℓ と曲線 C の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} ax &= -x(x-4) \\ \Leftrightarrow x(x+a-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 4-a \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} 0 &< 4-a < 4 \\ \therefore 0 &< a < 4 \quad (\because a \geq 0) \end{aligned}$$

のとき $x = 4-a$ であり、 $a \geq 4$ のとき $0 < x < 4$ の範囲に交点は存在しない。また、 $x \geq 4$ の範囲における直線 ℓ と曲線 C の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} ax &= x(x-4) \\ \Leftrightarrow x(x-a-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, a+4 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} 4 &\leq a+4 \\ \therefore a &\geq 0 \quad (\because a \geq 0) \end{aligned}$$

のとき $x = a+4$ である。以上より、曲線 C と直線 $y = ax$ ($a \geq 0$) の共有点の個数は

$$\begin{cases} 2 \text{ 個} & (a=0, a \geq 4 \text{ のとき}) \\ 3 \text{ 個} & (0 < a < 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

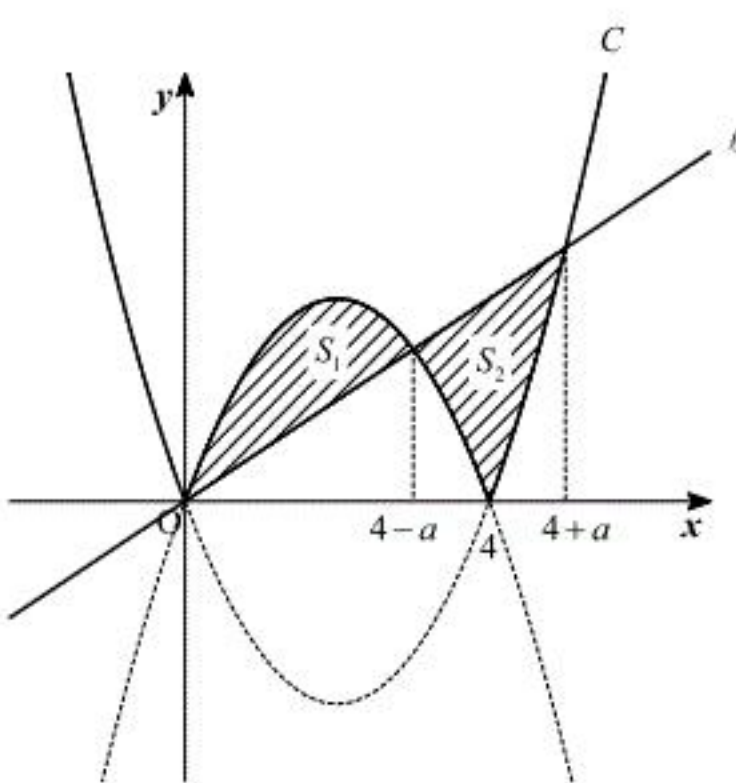
$$(\text{答}) \begin{cases} 2 \text{ 個} & (a=0, 4 \leq a \text{ のとき}) \\ 3 \text{ 個} & (0 < a < 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

$0 < a < 4$ のとき、(1)より、曲線 C と直線 ℓ の交点の x 座標は

$$x = 0, 4-a, a+4$$

であり、曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの部分は以下の図の斜線部のようになる。



2 つの部分の面積を上図のようにそれぞれ S_1, S_2 とすると、求める面積 S は S_1 と S_2 の和となる。上図より、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{4-a} \{-x(x-4) - ax\} dx \\ &= -\int_0^{4-a} x\{x - (4-a)\} dx \\ &= \frac{(4-a)^3}{6} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{4-a}^4 \{ax + x(x-4)\} dx + \int_4^{a+4} \{ax - x(x-4)\} dx \\ &= \int_{4-a}^4 \{x^2 - (4-a)x\} dx + \int_4^{a+4} \{-x^2 + (4+a)x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4-a}{2}x^2 \right]_{4-a}^4 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{4+a}{2}x^2 \right]_4^{a+4} \\ &= \left\{ \frac{64}{3} - 8(4-a) - \frac{(4-a)^3}{3} + \frac{(4-a)^3}{2} \right\} + \left\{ -\frac{(4+a)^3}{3} + \frac{(4+a)^3}{2} + \frac{64}{3} - 8(4+a) \right\} \\ &= \frac{(4-a)^3}{6} + \frac{(4+a)^3}{6} - \frac{64}{3} \end{aligned}$$

となることから、 S は

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{(4-a)^3}{6} + \frac{(4-a)^3}{6} + \frac{(4+a)^3}{6} - \frac{64}{3} \\ &= \frac{1}{6} \{ 2(4-a)^3 + (4+a)^3 - 128 \} \\ &= \frac{1}{6} (-a^3 + 36a^2 - 48a + 64) \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{6} (-a^3 + 36a^2 - 48a + 64)$$

(3)

S を a の関数として $S = T(a)$ とおくと、

$$\begin{aligned} T(a) &= \frac{1}{6} (-a^3 + 36a^2 - 48a + 64) \\ T'(a) &= \frac{1}{6} (-3a^2 + 72a - 48) \\ &= -\frac{1}{2} (a^2 - 24a + 16) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < a < 4$ の範囲では

$$\begin{aligned} T'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 24a + 16 &= 0 \\ \therefore a &= 12 - 8\sqrt{2} \quad (\because 0 < a < 4) \end{aligned}$$

となることから、 $0 < a < 4$ における $T(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	(0)	...	$12-8\sqrt{2}$	...	(4)
$T'(a)$		-	0	+	
$T(a)$		↘	最小	↗	

よって、上の増減表より $0 < a < 4$ の範囲では $a = 12 - 8\sqrt{2}$ のとき関数 $T(a)$ は最小となり、このとき S も最小となる。

$$(\text{答}) \quad a = 12 - 8\sqrt{2}$$