

〔1〕

〔解答〕

(1)

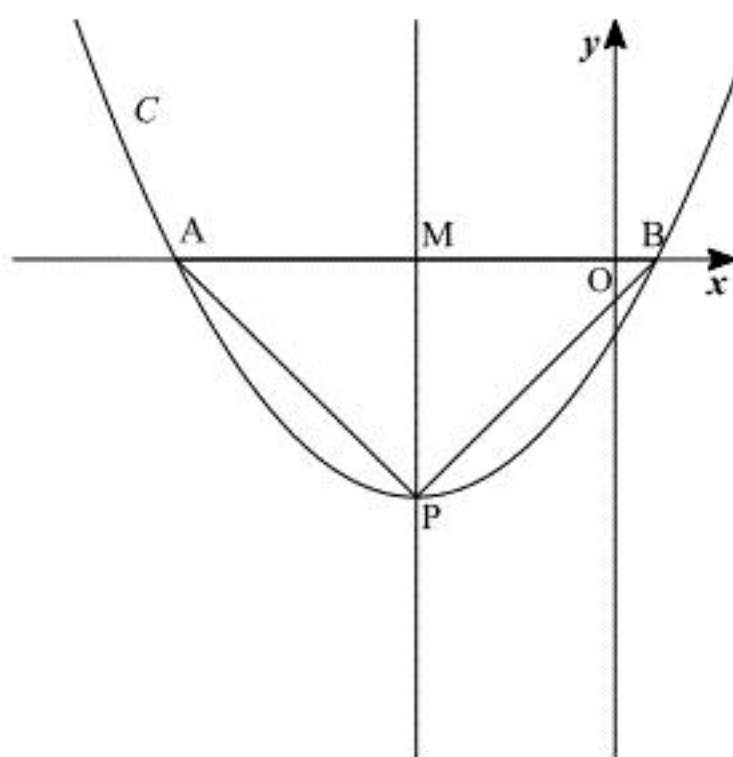
$$\text{ア} \quad -\frac{a+1}{2} \quad \text{イ} \quad -\frac{a^2+10a-3}{4} \quad \text{ウ} \quad -5+2\sqrt{7} \quad \text{エ} \quad \sqrt{a^2+10a-3} \quad \text{オ} \quad -5+4\sqrt{2}$$

(2)

$$\text{カ} \quad \frac{1}{8} \quad \text{キ} \quad \frac{7}{8} \quad \text{ク} \quad \frac{19}{27} \quad \text{ケ} \quad \frac{5}{8} \quad \text{コ} \quad \frac{2}{27}$$

〔解説〕

(1)



$$\begin{aligned} x^2 + (a+1)x - 2a + 1 &= \left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + 2a + 1}{4} - 2a + 1 \\ &= \left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + 10a - 3}{4} \end{aligned}$$

より C の頂点の座標は

$$\left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a^2+10a-3}{4}\right)$$

である。放物線 C は下に凸であるから、 C と x 軸が 2 つの共有点を持つための条件は、

$$\begin{aligned} -\frac{a^2+10a-3}{4} &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2+10a-3 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> -5+2\sqrt{7} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。また C と x 軸の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{a^2+10a-3}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-a-1 \pm \sqrt{a^2+10a-3}}{2} \end{aligned}$$

であるから、線分 AB の長さは

$$\sqrt{a^2+10a-3}$$

である。また点 A, B, P の x 座標が全て異なり、点 A, B は x 軸上にあることから、 $\triangle ABP$ が直角三角形となるのは、

$$\angle APB = 90^\circ$$

のときである。 A, B の中点を $M\left(\frac{-a-1}{2}, 0\right)$ としたとき、点 A, B は放物線 C の軸である直線

MP に関して対称であるから、 $\triangle ABP$ は $AP = BP$ となる二等辺三角形である。

よって $\triangle ABP$ が直角三角形、すなわち直角二等辺三角形となるための必要十分条件は、 $\triangle APM$ が直角二等辺三角形になることであるから、

$$\begin{aligned} MP &= MA \\ \Leftrightarrow \frac{a^2+10a-3}{4} &= \frac{\sqrt{a^2+10a-3}}{2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{a^2+10a-3}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{a^2+10a-3}}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+10a-3}}{2} &= 1 \quad (\because a^2+10a-3 > 0) \\ \Leftrightarrow a^2+10a-3 &= 4 \\ \Leftrightarrow a^2+10a-7 &= 0 \\ \therefore a &= -5+4\sqrt{2} \quad (\because a > -5+2\sqrt{7}) \end{aligned}$$

である。

(2)

3 個のサイコロの出た目を区別して考えると、3 つのサイコロの目の出方は 6^3 通りである。 X が奇数となるのは 1 個も偶数の目が出なかったときであるから、求める確率は

$$\frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$$

である。よって X が偶数となる確率は

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

である。 X が 3 の倍数となるためには、少なくとも一度 3 または 6 の目が出ればよいから、求める確率は、余事象を利用すると

$$1 - \frac{4^3}{6^3} = \frac{19}{27}$$

と求まる。 X が 4 の倍数とならないためには、一度も偶数の目がでない、または 2, 6 が一度しか出ず他の 2 回が奇数であればよい。よって X が 4 の倍数とならない目の出方の場合の数は、

$$3^3 + {}_3C_1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 81 \text{ (通り)}$$

であるから、 X が 4 の倍数となる確率は

$$1 - \frac{81}{6^3} = \frac{5}{8}$$

である。 X が 5 以下となる 3 つのサイコロの目の出方は、

$$\begin{aligned} &(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), \\ &(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (1, 1, 5), (1, 5, 1), (5, 1, 1), \\ &(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1) \end{aligned}$$

の 16 通りである。よって求める確率は

$$\frac{16}{6^3} = \frac{2}{27}$$

である。

〔2〕

〔解答〕

(1)

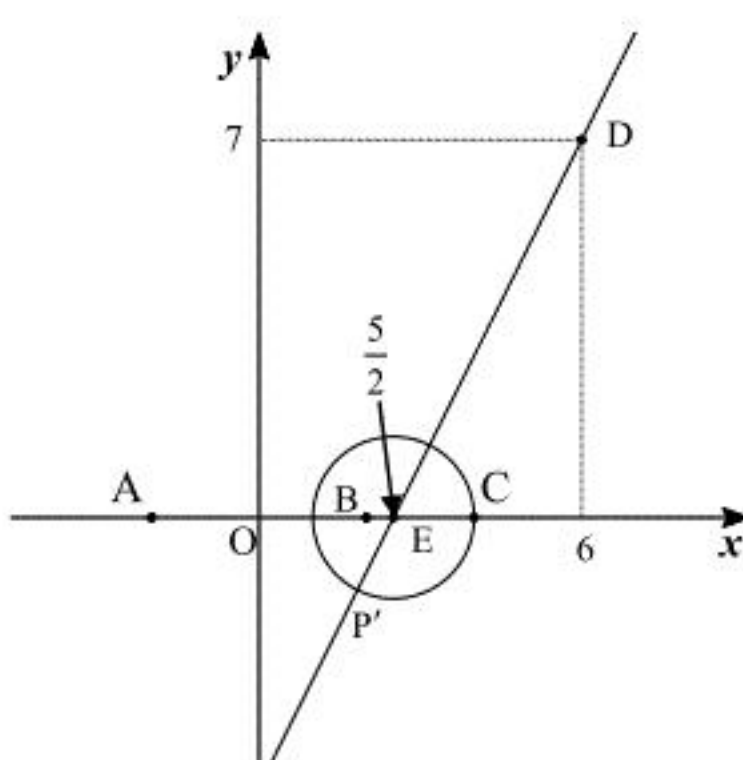
$$\text{ア} \quad 4 \quad \text{イ} \quad \frac{5}{2} \quad \text{ウ} \quad 0 \quad \text{エ} \quad \frac{3}{2} \quad \text{オ} \quad \frac{3+7\sqrt{5}}{2}$$

(2)

$$\text{カ} \quad p+1 \quad \text{キ} \quad 2(p+1)^{n-1} \quad \text{ク} \quad (-1)^n p \quad \text{ケ} \quad \frac{2(p+1)^{n-1} - (-1)^n p}{p+2} \quad \text{コ} \quad 2p(p+1)^{2n-2}$$

〔解説〕

(1)



点Cのx座標は

$$\frac{2 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{3 - 1} = 4$$

となる。点Pの座標を (x, y) とすると、

$$AP : BP = 3 : 1$$

$$\Leftrightarrow AP = 3BP$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 3\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

となり、両辺正であるから二乗して

$$(x+2)^2 + y^2 = 9\{(x-2)^2 + y^2\}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

を得る。よってPの軌跡は点 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円である。 $E\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ とし、直線DE

と円の交点のうちy座標が負である点をP'とすると、グラフより距離DPはPがP'に一致するときに最大値をとる。よってDPの最大値は

$$\begin{aligned} DP' &= DE + CE \\ &= \sqrt{\left(6 - \frac{5}{2}\right)^2 + 7^2} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{3+7\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2} + a_{n+1} \\ &= pa_{n+1} + (p+1)a_n + a_{n+1} \\ &= (p+1)(a_{n+1} + a_n) \\ &= (p+1)b_n \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{1+1} + a_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となるから、 $\{b_n\}$ は初項2、公比 $p+1$ の等比数列である。よって $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 2(p+1)^{n-1}$$

である。また、

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+2} - (p+1)a_{n+1} \\ &= pa_{n+1} + (p+1)a_n - (p+1)a_{n+1} \\ &= -\{a_{n+1} - (p+1)a_n\} \\ &= -c_n \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2 - (p+1)a_1 \\ &= -p \end{aligned}$$

となるので、 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = (-1)^n p$$

である。よって $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(p+2)a_n}{p+2} \quad (\because p+2 > 0) \\ &= \frac{(a_{n+1} + a_n) - \{a_{n+1} - (p+1)a_n\}}{p+2} \\ &= \frac{b_n - c_n}{p+2} \\ &= \frac{2(p+1)^{n-1} - (-1)^n p}{p+2} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} a_{2n+1} - a_{2n-1} &= \frac{2(p+1)^{2n} - (-1)^{2n+1} - \{2(p+1)^{2n-2} - (-1)^{2n-1}\}}{p+2} \\ &= \frac{2\{(p+1)^{2n} - (p+1)^{2n-2}\}}{p+2} \\ &= \frac{2\{(p+1)^2 - 1\}(p+1)^{2n-2}}{p+2} \\ &= \frac{2(p^2 + 2p)(p+1)^{2n-2}}{p+2} \\ &= \frac{2p(p+2)(p+1)^{2n-2}}{p+2} \\ &= 2p(p+1)^{2n-2} \end{aligned}$$

となる。

〔3〕

(1)

関数 $f(x), g(x)$ について

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 2x + a + 1 &= x^2 + 7x + 1 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x &= -a \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

より, xy 平面において曲線 $y = f(x)$ と放物線 $y = g(x)$ が 2 個の共有点をもつということは, 3 次方程式①が 2 個の実数解をもつということと同値である。ここで, 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$$

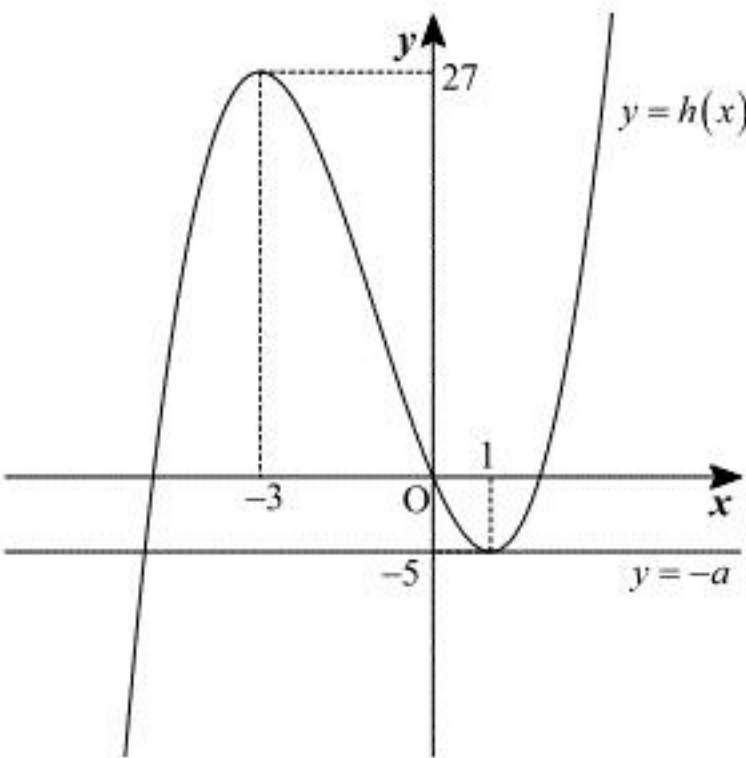
とおくと, 上の条件はさらに, xy 平面において曲線 $y = h(x)$ と直線 $y = -a$ が 2 個の共有点をもつということと同値である。導関数 $h'(x)$ は

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ &= 3(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

と計算できるから, 関数 $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

したがって, xy 平面上に曲線 $y = h(x)$ を図示すると, 以下の図のようになるから



求める正の実数 a の値は $a = 5$ である。

(答) $a = 5$

(2)

(1)の結果より, $a = 5$ のとき

$$\begin{aligned} h(x) &= -5 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(x+5) &= 0 \end{aligned}$$

より, 共有点の x 座標は $x = 1, -5$ である。よって, $\alpha = -5, \beta = 1$ であるから, 点 A, B の座標は

$$\begin{aligned} A(\alpha, g(\alpha)) &= (-5, -9) \\ B(\beta, g(\beta)) &= (1, 9) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $A(-5, -9), B(1, 9)$

(3)

関数 $f(x), g(x)$ の導関数は, それぞれ

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 2, g'(x) = 2x + 7$$

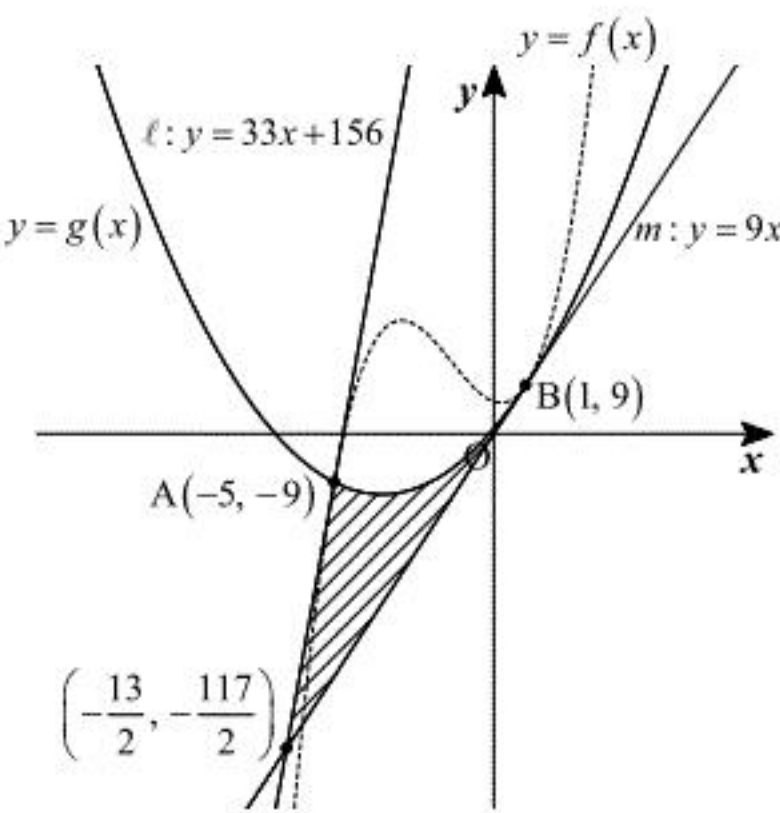
と計算できるから, 点 A における曲線 $y = f(x)$ の接線 ℓ , 点 B における曲線 $y = g(x)$ の接線 m の方程式は

$$\begin{aligned} \ell: y &= f'(-5)\{x - (-5)\} - 9 \Leftrightarrow y = 33x + 156 \\ m: y &= g'(1)\{x - 1\} + 9 \Leftrightarrow y = 9x \end{aligned}$$

と求まる。また, この 2 直線の交点の座標は, 2 式を連立することで

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 33x + 156 \\ y = 9x \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{13}{2}, -\frac{117}{2}\right) \end{aligned}$$

であることがわかる。ここで, xy 平面上に直線 ℓ, m , 曲線 $f(x), g(x)$ を図示すると, 以下の図のようになる。



したがって, 直線 ℓ, m と放物線 $y = g(x)$ で囲まれる図形は上図の斜線部となり, その面積は

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{13}{2}}^{-5} \{(33x + 156) - 9x\} dx + \int_{-5}^1 \{(x^2 + 7x + 1) - 9x\} dx \\ &= \left[12x^2 + 156x\right]_{-\frac{13}{2}}^{-5} + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_{-5}^1 \\ &= \left\{(300 - 780) - \left(12 \cdot \frac{169}{4} - 156 \cdot \frac{13}{2}\right)\right\} + \left\{\left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(-\frac{125}{3} - 25 - 5\right)\right\} \\ &= 99 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) 99