

〔1〕

〔解答〕

$$(1) \quad \text{ア} \quad \frac{1-\log x}{x^2} \quad \text{イ} \quad \frac{-3+2\log x}{x^3} \quad \text{ウ} \quad -\frac{1}{2e^3}$$

$$(2) \quad \text{エ} \quad -\vec{a}-\vec{b} \quad \text{オ} \quad -\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b} \quad \text{カ} \quad \frac{\sqrt{33}}{3}$$

$$(3) \quad \text{キ} \quad 1 \quad \text{ク} \quad \sqrt{3} \quad \text{ケ} \quad 1 \quad \text{コ} \quad -1$$

〔解説〕

(1)

$f(x)=\frac{\log x}{x}$ のとき、第1次導関数と第2次導関数はそれぞれ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\log x)' \cdot x - (x)' \cdot \log x}{x^2} \\ &= \frac{1-\log x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(1-\log x)' \cdot x^2 - (1-\log x) \cdot (x^2)'}{x^4} \\ &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1-\log x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{-1-2(1-\log x)}{x^3} \\ &= \frac{-3+2\log x}{x^3} \end{aligned}$$

である。変曲点の x 座標は

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -3+2\log x &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow x &= e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

であるから、 $y=f(x)$ の変曲点における接線の傾きは

$$\begin{aligned} f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1-\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

である。

(2)

点 G が重心であることより

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}) &= \overrightarrow{GG} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GC} &= -\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB} \\ &= -\vec{a}-\vec{b} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}) \\ &= \frac{1}{2}\{\vec{a}+(-\vec{a}-\vec{b})\} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{GM}-\overrightarrow{GA} \\ &= -\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB} \\ &= -\vec{a}-2\vec{b} \end{aligned}$$

と表せることから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 1 - \frac{4}{3} + 4 \\ &= \frac{11}{3} \\ \therefore |\overrightarrow{BC}| &= \frac{\sqrt{33}}{3} \end{aligned}$$

である。

(3)

3次方程式 $x^3+8=0$ の解は

$$\begin{aligned} x^3+8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, 1 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

である。複素数 α を

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

とおくと、 $2\alpha=1+\sqrt{3}i$ は $x^2-2x+4=0$ の解であるから

$$\begin{aligned} (2\alpha)^2-2 \cdot (2\alpha)+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\alpha^2-4\alpha+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha+1 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned} \alpha^2-\alpha+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1) &= 0 \quad (\because \alpha \neq 1) \\ \Leftrightarrow \alpha^3+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^3 &= -1 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \alpha^{999} &= (\alpha^3)^{333} \\ &= (-1)^{333} \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

ア	0	イ	al	ウ	$\frac{2}{3}$	エ	π
オ	$\frac{4}{4-t^2}$	カ	$\log t+\alpha $	キ	$\log\left \frac{t+2}{t-2}\right $	ク	$2\log 3$
ケ	$\pi\log 3$	コ	$\frac{4p}{p^2+3}$				

〔解説〕

$f(x)$ は偶関数であるから、奇関数と偶関数の積である $xf(x)$ は奇関数である。よって、

$$\int_{-a}^a xf(x)dx=0$$

となる。 $u=x+a$ と置換すると、 $du=dx$ より

$$\begin{aligned}\int_0^{2a} uf(u-a)du &= \int_{-a}^a (x+a)f(x)dx \\ &= \int_{-a}^a xf(x)dx + a\int_{-a}^a f(x)dx \\ &= al\end{aligned}$$

となる。

(1)

$f(x)=x^2$ 、 $a=1$ のとき、

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^1 x^2 dx \\ &= 2\int_0^1 x^2 dx \\ &= 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^2 u(u-1)^2 du &= al \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$f(x)=\cos x$ 、 $a=\frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} u\cos\left(u-\frac{\pi}{2}\right)du &= al \\ &= \pi\end{aligned}$$

となる。

(3)

$f(x)=\frac{4\cos x}{4-\sin^2 x}$ 、 $a=\frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin x=t$ と置換すると $\cos x dx=dt$ であるから、

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x}{4-\sin^2 x} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{4}{4-t^2} dt\end{aligned}$$

となる。したがって、 $g(t)=\frac{4}{4-t^2}$ である。また、

$$\int \frac{1}{t+\alpha} dt = \log|t+\alpha| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから

$$\begin{aligned}\int g(t)dt &= \int \frac{4}{4-t^2} dt \\ &= -\int \frac{4}{(t+2)(t-2)} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}\right) dt \\ &= \log\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

となる。よって、 I の値は

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^1 g(t)dt \\ &= 2\int_0^1 g(t)dt \\ &= 2\left[\log\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\right]_0^1 \\ &= 2\log 3\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} uf\left(u-\frac{\pi}{2}\right)du &= al \\ &= \pi\log 3\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}f\left(u-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4\cos\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}{4-\sin^2\left(u-\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{4\sin u}{4-(-\cos u)^2} \\ &= \frac{4\sin u}{4-\cos^2 u} \\ &= \frac{4\sin u}{4-(1-\sin^2 u)} \\ &= \frac{4\sin u}{3+\sin^2 u}\end{aligned}$$

となるので、 $h(p)=\frac{4p}{p^2+3}$ となる。

【3】

【解答】

ア	1	イ	0	ウ	$\frac{5}{9}$	エ	$\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}r_{n-1}$
オ	$\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}q_{n-1}$	カ	$\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}r_{n-1}$	キ	$\frac{1}{3}p_{n-2}+\frac{2}{9}$	ク	$2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{3}$
ケ	$-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{1}{3}$	コ	$\frac{1}{3}$				

【解説】

焼きいも屋さんは常に京都、大阪、神戸のいずれかの都市で店を出すので、任意の自然数 n について

$$p_n+q_n+r_n=1 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立ち、 $p_1=1, q_1=0, r_1=0$ より

$$\begin{cases} p_2=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 0=0 \\ q_2=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{1}{3} \\ r_2=\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_3=\frac{1}{3}\cdot \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot \frac{2}{3}=\frac{5}{9} \\ q_3=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot \frac{1}{3}=\frac{2}{9} \\ r_3=\frac{2}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot \frac{2}{3}=\frac{2}{9} \end{cases}$$

となる。また、 $n\geq 2$ のとき、

$$\begin{cases} p_n=\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}r_{n-1} \\ q_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}q_{n-1} \\ r_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}r_{n-1} \end{cases}$$

となるので、 $n\geq 3$ のとき、

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}r_{n-1} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}p_{n-2}+\frac{2}{3}q_{n-2}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}p_{n-2}+\frac{1}{3}r_{n-2}\right) \\ &= \frac{5}{9}p_{n-2}+\frac{2}{9}(q_{n-2}+r_{n-2}) \end{aligned}$$

であり、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} p_{n-2}+q_{n-2}+r_{n-2} &= 1 \\ \Leftrightarrow q_{n-2}+r_{n-2} &= 1-p_{n-2} \end{aligned}$$

であることを用いると

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{5}{9}p_{n-2}+\frac{2}{9}(1-p_{n-2}) \\ &= \frac{2}{9}+\frac{1}{3}p_{n-2} \end{aligned}$$

となる。これを変形すると

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{2}{9}+\frac{1}{3}p_{n-2} \\ \Leftrightarrow p_n-\frac{1}{3} &= \frac{1}{3}\left(p_{n-2}-\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

となるから、 n が奇数のとき $n=2m-1$ において p_n を求めると

$$\begin{aligned} p_{2m-1}-\frac{1}{3} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\cdot\left(p_1-\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}-1}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) \\ &= 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}} \\ \Leftrightarrow p_n &= 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

となり、 n が偶数のとき $n=2m$ において p_n を求めると

$$\begin{aligned} p_{2m}-\frac{1}{3} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\cdot\left(p_2-\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(0-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \\ \Leftrightarrow p_n &= -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 n が奇数のとき

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty}p_n &= \lim_{m\rightarrow\infty}p_{2m-1} \\ &= \lim_{m\rightarrow\infty}\left\{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^m+\frac{1}{3}\right\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となり、 n が偶数のとき

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty}p_n &= \lim_{m\rightarrow\infty}p_{2m} \\ &= \lim_{m\rightarrow\infty}\left\{-\left(\frac{1}{3}\right)^m+\frac{1}{3}\right\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

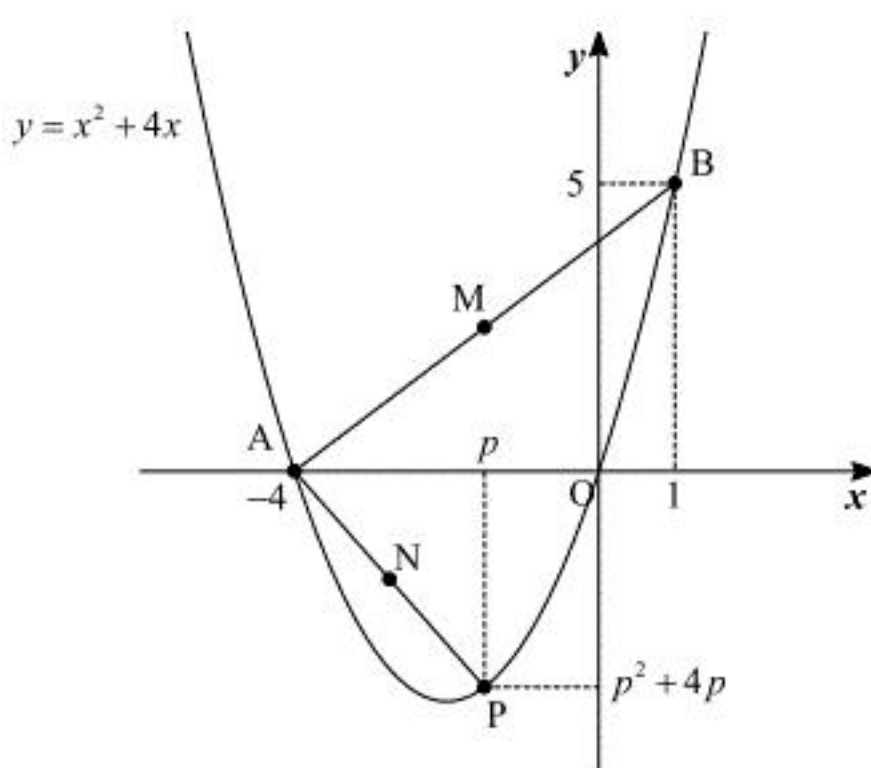
となることから

$$\lim_{n\rightarrow\infty}p_n=\frac{1}{3}$$

である。

〔4〕

(1)



線分 AB の中点を M とすると、線分 AB の垂直二等分線は点 M を通り AB に垂直な直線に等しい。M の座標は

$$\left(\frac{-4+1}{2}, \frac{0+5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

であり、直線 AB の傾きは

$$\frac{1-(-4)}{5-0} = 1$$

であるから、求める方程式は

$$y = -1 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{2} \\ = -x + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。

(答) $y = -x + 1$

(2)

線分 AP の中点を N とすると、線分 AP の垂直二等分線は点 N を通り AP に垂直な直線に等しい。N の座標は

$$\left(\frac{-4+p}{2}, \frac{0+(p^2+4p)}{2}\right) = \left(\frac{p-4}{2}, \frac{p^2+4p}{2}\right)$$

であり、直線 AP の傾きは

$$\frac{(p^2+4p)-0}{p-(-4)} = \frac{p^2+4p}{p+4} \\ = p \quad (\because -4 < p < 1)$$

であるから、垂直二等分線の方程式は $p \neq 0$ のとき

$$y = -\frac{1}{p} \cdot \left(x - \frac{p-4}{2}\right) + \frac{p^2+4p}{2} \\ \Leftrightarrow py = -x + \frac{p-4}{2} + \frac{p(p^2+4p)}{2} \\ \Leftrightarrow x + py = \frac{p^3+4p^2+p-4}{2}$$

と表せる。 $p = 0$ のとき垂直二等分線は $x = -2$ であるから、上の式は $p = 0$ のときも成り立つ。したがって、求める垂直二等分線の方程式は

$$x + py = \frac{p^3+4p^2+p-4}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また、 $\triangle ABP$ の外接円 C の中心 (s, t) は線分 AB の垂直二等分線と線分 AP の垂直二等分線の交点に一致することから、①、②より s, t について

$$\begin{cases} t = -s + 1 \\ s + pt = \frac{p^3+4p^2+p-4}{2} \end{cases}$$

が成り立つ。よって、上式より t を消去すると

$$s + p(-s + 1) = \frac{p^3+4p^2+p-4}{2} \\ \Leftrightarrow (1-p)s = \frac{p^3+4p^2-p-4}{2} \\ \Leftrightarrow (1-p)s = \frac{(p+4)(p^2-1)}{2} \\ \Leftrightarrow s = -\frac{(p+4)(p+1)}{2} \quad (\because -4 < p < 1) \\ \Leftrightarrow s = -\frac{p^2+5p+4}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

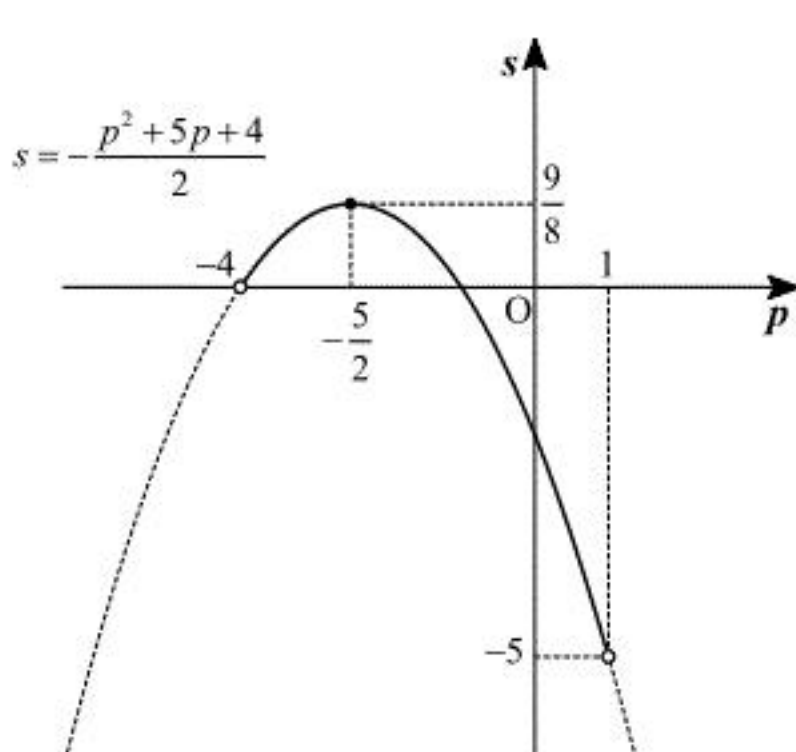
$$(答) \quad x + py = \frac{p^3+4p^2+p-4}{2}, s = -\frac{p^2+5p+4}{2}$$

(3)

③より s は p を用いて

$$s = -\frac{p^2+5p+4}{2} \\ = -\frac{1}{2} \left(p + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

と表せるから、 p が $-4 < p < 1$ の範囲を動くときの s のグラフは下図のようになる。



したがって、 s のとりうる値の範囲は

$$-5 < s \leq \frac{9}{8}$$

となる。

$$(答) \quad -5 < s \leq \frac{9}{8}$$

(4)

円 C の中心を $C'(s, t)$ 、半径を r とすると、 r^2 は s を用いて

$$r^2 = C'A^2 \\ = \{s - (-4)\}^2 + \{t - 0\}^2 \\ = (s+4)^2 + (-s+1)^2 \\ = 2s^2 + 6s + 17 \\ = 2\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$$

と表せる。ここで、(3)の結果より s のとりうる値の範囲は $-5 < s \leq \frac{9}{8}$ であるから、 r^2 は $s = -\frac{3}{2}$

のとき最小値 $\frac{25}{2}$ をとることがわかる。したがって、 r の最小値は $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ である。このとき、③

より

$$s = -\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{p^2+5p+4}{2} = -\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow p^2+5p+1 = 0 \\ \Leftrightarrow p = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

であるが、 $4 < \sqrt{21} < 5$ より $p = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}$ は $-4 < p < 1$ を満たさないため、 r が最小値をとると

きの p の値は $p = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$ である。

$$(答) \quad \text{最小値: } \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad p \text{ の値: } \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$