

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$-a$	$2a^2 - 2a + 1$	-1	$3 - 2\sqrt{3}$	1
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	28	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

【解説】

(1)

関数 $f(x)$ を $f(x) = -x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 1$ とおく。2 次関数 $f(x)$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 1 \\ &= -(x+a)^2 + 2a^2 - 2a + 1 \end{aligned}$$

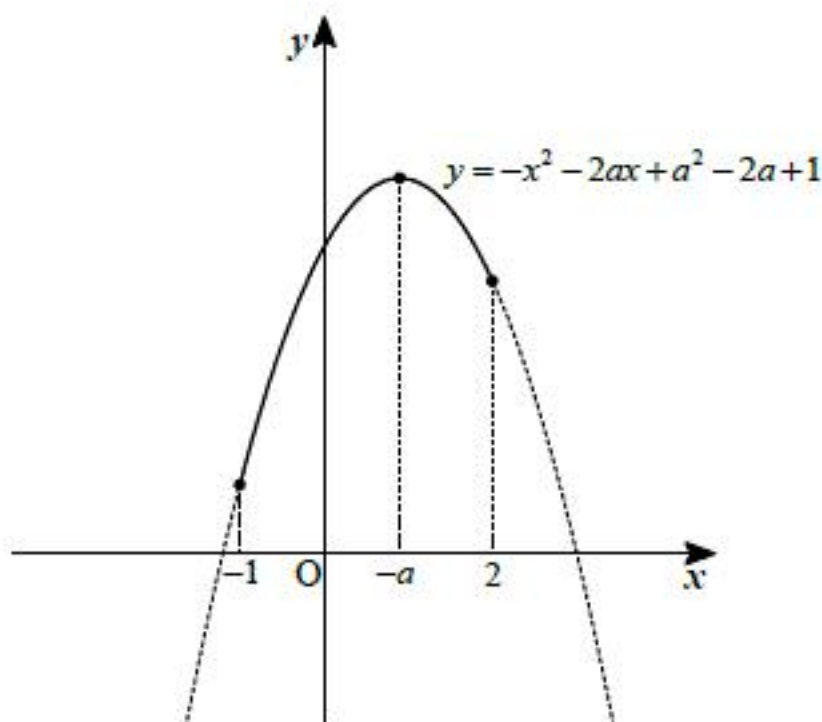
となる。ここで、関数①について x の動く範囲は $-1 \leq x \leq 2$ であり、問題文の条件より

$$-2 < a < 1 \Leftrightarrow -1 < -a < 2$$

であるから、これは $x = -a$ のとき最大値 $2a^2 - 2a + 1$ をとることがわかる。よって、関数①の最大値が 5 となるとき、 a の値は

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2a + 1 &= 5 \\ \Leftrightarrow a^2 - a - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)(a-2) &= 0 \\ \therefore a &= -1 \quad (\because -2 < a < 1) \end{aligned}$$

と求まる。また、関数①は下図より $x = -1$ または $x = 2$ で最小値をとることがわかるから、



この最小値が負となるための条件は

$$\begin{aligned} &f(-1) \text{ と } f(2) \text{ の最小値が負} \\ \Leftrightarrow f(-1) < 0 \text{ または } f(2) < 0 \\ \Leftrightarrow a^2 < 0 \text{ または } a^2 - 6a - 3 < 0 \\ \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{3} < a < 1 \quad (\because -2 < a < 1, 1 < \sqrt{3} < 2) \end{aligned}$$

となる。

(2)

取り出した 2 個の玉の番号の組み合わせの総数は

$${}_8C_2 = 28 \text{ [通り]}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。 $X = 0$ となるのは、1, 3, 5, 7 の番号のついた玉の中から 2 個取り出したときであるから、その確率は

$$\frac{{}_4C_2}{28} = \frac{3}{14}$$

である。また、 $X = 1$ となるのは、1, 3, 5, 7 の番号のついた玉の中から 1 個と、2, 4, 6, 8 の番号のついた玉の中から 1 個を取り出したときであるから、その確率は

$$\frac{4 \times 4}{28} = \frac{4}{7}$$

である。さらに、 $Y = 0$ となるのは、1, 2, 4, 5, 7, 8 の番号のついた玉の中から 2 個取り出したときであるから、その確率は

$$\frac{{}_6C_2}{28} = \frac{15}{28}$$

である。最後に、 $X = 0$ と $Y = 0$ が同時に成り立つのは、1, 5, 7 の番号のついた玉の中から 2 個取り出したときであるから、その確率は

$$\frac{{}_3C_2}{28} = \frac{3}{28}$$

である。

〔2〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$6-\sqrt{30}$	$6+\sqrt{30}$	$\frac{2a(2a-3)}{a^2+1}$	$6-\sqrt{30}$	$\frac{3}{2}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	2^{n-1}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\left\{2^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

〔解説〕

(1)

C, ℓ を表す2式から y を消去すると

$$x^2+(ax-2a+3)^2=3$$

$$\Leftrightarrow (a^2+1)x^2-2a(2a-3)x+4a^2-12a+6=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 ℓ は y 軸と平行となることはないから、 ℓ と C が異なる2点で交わるのは2次方程式①($\because a^2+1>0$)が異なる2つの実数解を持つときである。よって、①の判別式 D について考えて

$$\frac{D}{4}>0$$

$$\Leftrightarrow \{a(2a-3)\}^2-(a^2+1)(4a^2-12a+6)>0$$

$$\Leftrightarrow a^2-12a+6<0$$

$$\Leftrightarrow 6-\sqrt{30}<a<6+\sqrt{30} \quad \cdots \textcircled{2}$$

を得る。また、 α, β は①式の2解であるから、解と係数の関係式より

$$\alpha+\beta=\frac{2a(2a-3)}{a^2+1}$$

となる。したがって、条件 $\alpha+\beta<0$ は②のもとで

$$\alpha+\beta<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a(2a-3)}{a^2+1}<0$$

$$\Leftrightarrow a(2a-3)<0 \quad (\because a^2+1>0)$$

$$\Leftrightarrow 0<a<\frac{3}{2}$$

と変形できるから、②式と合わせて、 $\alpha+\beta<0$ となる a の範囲は

$$6-\sqrt{30}<a<\frac{3}{2} \quad (\because 5<\sqrt{30}<6)$$

と求まる。

(2)

すべての自然数 n について、 $S_n=-a_n+2^n$ が成り立つから、数列 $\{a_n\}$ は

$$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow -a_{n+1}+2^{n+1}-(-a_n+2^n)=a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2^{n-1} \quad \cdots \textcircled{3}$$

なる漸化式を満たす。また、 $S_1=a_1$ であるから

$$a_1=-a_1+2$$

$$\therefore a_1=1$$

となる。ここで、ある定数 p を用いて $b_n=a_n-p\cdot 2^n$ と表すと、③は

$$b_{n+1}+p\cdot 2^{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+p\cdot 2^n)+2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+(-3p+1)2^{n-1}$$

と変形できるから、 $p=\frac{1}{3}$ とすると、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列となることがわかる。よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=b_n+\frac{1}{3}\cdot 2^n$$

$$=\frac{1}{3}\left\{2^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

と求まる。

[3]

(1)

関数 $f(x)$ を $f(x)=4-x^2$ とおく。導関数 $f'(x)$ を計算すると

$$f'(x)=-2x$$

となるから、放物線 $y=f(x)$ 上の点 $P(a, 4-a^2)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

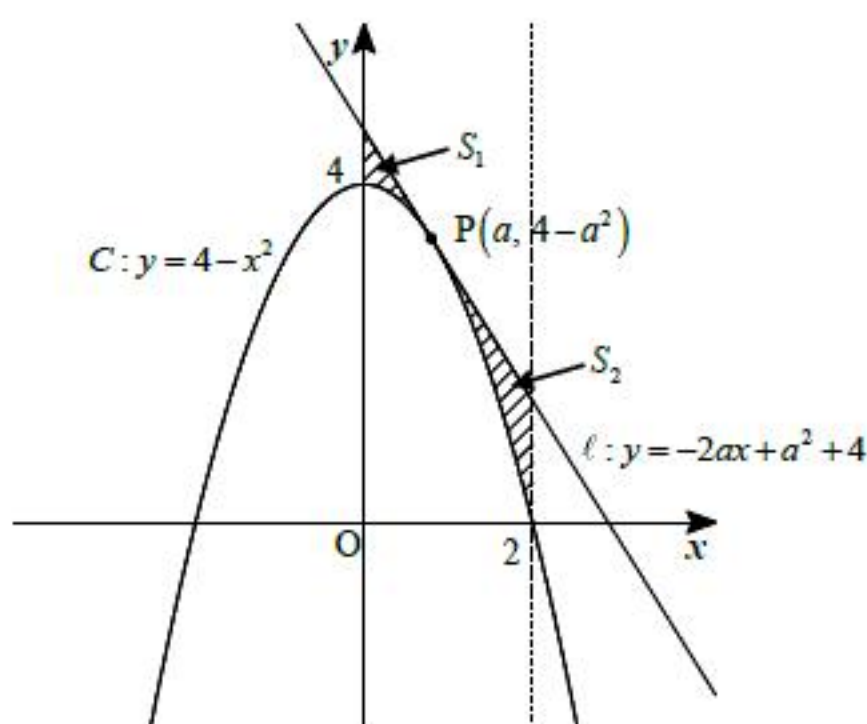
$$\Leftrightarrow y=-2a(x-a)+4-a^2$$

$$\Leftrightarrow y=-2ax+a^2+4$$

である。

$$(\text{答}) \ell: y=-2ax+a^2+4$$

(2)



$0 < a < 2$ であることから、 S_1, S_2 はそれぞれ上図の斜線部の面積である。これを計算すると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a \{(-2ax + a^2 + 4) - (4 - x^2)\} dx \\ &= \int_0^a (x - a)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - a)^3 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^2 \{(-2ax + a^2 + 4) - (4 - x^2)\} dx \\ &= \int_a^2 (x - a)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - a)^3 \right]_a^2 \\ &= \frac{1}{3}(2 - a)^3 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) S_1 = \frac{1}{3}a^3, S_2 = \frac{1}{3}(2 - a)^3$$

(3)

(2)の結果より、 $2S_1 + S_2$ は a で

$$2S_1 + S_2 = \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}(2 - a)^3$$

と表せる。ここで、関数 $g(a)$ を $g(a) = \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}(2 - a)^3$ とおき、導関数を求めると

$$\begin{aligned} g'(a) &= 2a^2 - (2 - a)^2 \\ &= a^2 + 4a - 4 \\ &= \{a - (-2 - 2\sqrt{2})\} \{a - (-2 + 2\sqrt{2})\} \end{aligned}$$

となる。 $1 < \sqrt{2} < 2$ に注意すれば、 $0 < -2 + 2\sqrt{2} < 2$ であることがわかるから、 $g(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	0	...	$-2 + 2\sqrt{2}$	...	2
$f'(a)$	$\nearrow$	-	0	+	$\nearrow$
$f(a)$	$\nearrow$	$\searrow$	最小	$\nearrow$	$\nearrow$

したがって、 $g(a)$ は $a = -2 + 2\sqrt{2}$ のとき最小値

$$\begin{aligned} g(-2 + 2\sqrt{2}) &= \frac{2}{3}(-2 + 2\sqrt{2})^3 + \frac{1}{3}(4 - 2\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{4}{3}(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})^3 \\ &= 16 - \frac{32\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

をとることがわかる。

$$(\text{答}) a = -2 + 2\sqrt{2} \text{ のとき, } 2S_1 + S_2 \text{ は最小値 } 16 - \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ をとる}$$