〔1〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$\frac{1}{a}$	$\sqrt{1+\frac{2}{a}}$	$\sqrt{1+\frac{2}{a}}\left(1-\frac{1}{a}\right)$	$1-\frac{2}{a^2}$	a^4-2a^2
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{5}{486}$

〔解説〕

(1)

$0°<\theta<90°$ では $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0,\ \tan\theta>0$ であり，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}>0$ より $a\neq 0$ であるから，

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=a$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=a$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=a$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta\sin\theta=\frac{1}{a}$$

である。また，$\cos\theta+\sin\theta>0$ であるから，

$$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{(\cos\theta+\sin\theta)^2}$$
$$=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta}$$
$$=\sqrt{1+\frac{2}{a}}$$

であり，

$$\cos^3\theta+\sin^3\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$$
$$=\sqrt{1+\frac{2}{a}}\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

であり，

$$\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta$$
$$=1-2(\cos\theta\sin\theta)^2$$
$$=1-\frac{2}{a^2}$$

であり，

$$\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{1}{\sin^4\theta}=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{(\cos\theta\sin\theta)^4}$$
$$=\left(1-\frac{2}{a^2}\right)\div\left(\frac{1}{a}\right)^4$$
$$=a^4-2a^2$$

である。

(2)

サイコロを2回振った後点Pが原点にあるのは，例えば x 軸の正の方向に1進んだ後に x 軸の負の方向に1進むというように，サイコロがいずれかの方向に進んだ後それとは逆の方向に進む場合である。x 軸の正の方向に1進む目と y 軸の正の方向に1進む目はそれぞれ1と4，x 軸の負の方向に1進む目と y 軸の負の方向に1進む目はそれぞれ2, 3と5, 6であることに注意すると，条件を満たす目の出方は，

$$2\cdot(1\cdot 2)+2\cdot(2\cdot 1)=8$$

通りである。サイコロを2回振ったときの全ての目の出方は 6^2 通りあるから，サイコロを2回振った後点Pが原点にある確率は，

$$\frac{8}{6^2}=\frac{2}{9}$$

である。

サイコロを2回振った後点Pの x 座標が負となるのは，以下の場合である。

[1] 2, 3の目が2回出るとき

そのような目の出方は，

$$2\cdot 2=4$$

通りである。

[2] 2, 3の目が1回，4, 5, 6の目が1回出るとき

そのような目の出方は，

$$2\cdot 3\cdot 2=12$$

通りである。

[1], [2]より，サイコロを2回振った後点Pの x 座標が負となる確率は，

$$\frac{4+12}{6^2}=\frac{4}{9}$$

である。

サイコロを4回振った後点Pが原点にあるのは，以下の場合である。

[1] 点Pが x 軸上のみまたは y 軸上のみを移動するとき

このようになるのは，ある1つの軸上において，正方向と負方向に2回ずつ進んだときである。そのような目の出方は，

$$2\cdot\frac{4!}{2!2!}\cdot 1^2\cdot 2^2=48$$

通りである。

[2] [1]の条件を満たさないとき

このようになるのは，進み得る全ての方向に1回ずつ進んだときである。そのような目の出方は，

$$4!\,1\cdot 2\cdot 1\cdot 2=96$$

通りである。

サイコロを4回振ったときの全ての目の出方は 6^4 通りあるから，[1], [2]より，サイコロを4回振った後点Pが原点にある確率は，

$$\frac{48+96}{6^4}=\frac{1}{9}$$

である。

サイコロを4回振った後点Pが $(2,-2)$ にあるのは，x 軸の正方向と y 軸の負方向に2回ずつ進んだときである。そのような目の出方は，

$$\frac{4!}{2!2!}\cdot 1^2\cdot 2^2=24$$

通りである。よって，サイコロを4回振った後点Pが $(2,-2)$ にある確率は，

$$\frac{24}{6^4}=\frac{1}{54}$$

である。

サイコロを5回振ったとき，点Pが x 軸上の点のみを通過し，$(-1,0)$ に来るのは，x 軸の正方向に2回，負方向に3回進んだときである。そのような目の出方は，

$$\frac{5!}{2!3!}\cdot 1^2\cdot 2^3=80$$

通りである。よって，サイコロを5回振ったとき，点Pが x 軸上の点のみを通過し，$(-1,0)$ に来る確率は，

$$\frac{80}{6^5}=\frac{5}{486}$$

である。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$-2x^2+ax-a+1$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	$4-2\sqrt{2}$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{(1-s)}{3}\vec{a}+s\vec{b}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{18}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} g(x) &= 1-2\sin^2\theta+a\sin\theta-a \\ &= -2x^2+ax-a+1 \end{aligned}$$

である。また，$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ で $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であるから，$-1 \leqq x \leqq 1$ であり，この範囲で x と θ は1対1で対応する。さらに，$g(1)=-1<0$ であり，$g(x)$ は上に凸の放物線である。したがって，$-1 \leqq x \leqq 1$ で $y=0$ となる θ が2つ存在する，すなわち $y=g(x)$ が x 軸と交点を2つ持つのは，$g(-1) \leqq 0$ で，$y=g(x)$ の軸が $-1<x<1$ にあり，$y=g(x)$ の頂点の y 座標が正のときである。ここで，

$$g(x)=-2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}-a+1$$

であり，

$$\begin{aligned} & g(-1) \leqq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2a-1 \leqq 0 \\ \Leftrightarrow\ & a \geqq -\frac{1}{2} \qquad \cdot\cdot\cdot ① \end{aligned}$$

であり，軸の条件について，

$$\begin{aligned} & -1<\frac{a}{4}<1 \\ \Leftrightarrow\ & -4<a<4 \qquad \cdot\cdot\cdot ② \end{aligned}$$

であり，頂点の条件について，

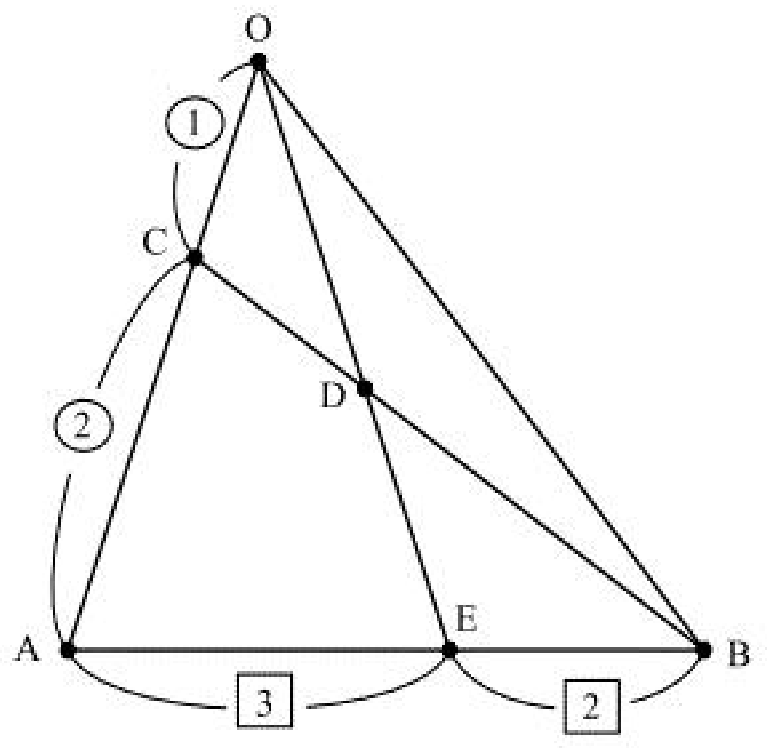
$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{8}-a+1>0 \\ \Leftrightarrow\ & a^2-8a+8>0 \\ \Leftrightarrow\ & a<4-2\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2}<a \qquad \cdot\cdot\cdot ③ \end{aligned}$$

である。よって，題意を満たす a の範囲は，①，②，③より，

$$-\frac{1}{2} \leqq a < 4-2\sqrt{2}$$

のときである。

(2)



$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}\vec{a}$ であるから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CB}} \\ &= s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\vec{b} \\ &= \frac{(1-s)}{3}\vec{a}+s\vec{b} \qquad \cdot\cdot\cdot ④ \end{aligned}$$

である。一方で，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は零ベクトルではないから $t \neq 0$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OD}}=t^{-1}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ である。よって点Eが線分ABを3:2に内分するとき，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OD}} &= t^{-1}\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right) \\ &= \frac{2}{5}t^{-1}\vec{a}+\frac{3}{5}t^{-1}\vec{b} \qquad \cdot\cdot\cdot ⑤ \end{aligned}$$

であり，$\vec{a},\vec{b}$ は互いに1次独立であるから，④，⑤より

$$\begin{cases} \frac{1-s}{3}=\frac{2}{5}t^{-1} \\ s=\frac{3}{5}t^{-1} \end{cases}$$

であり，これを解いて $\left(s,t^{-1}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{9}\right) \Leftrightarrow (s,t)=\left(\frac{1}{3},\frac{9}{5}\right)$ となる。

また，$\left|\vec{a}\right|=3, \left|\vec{b}\right|=1$ のもと，

$$\begin{aligned} & \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow\ & \left|\vec{a}-\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=5 \\ \Leftrightarrow\ & \left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=5 \\ \Leftrightarrow\ & \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。④より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ であるから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \\ &= \left(\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}\right) \\ &= -\frac{2}{27}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{1}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\left|\vec{b}\right|^2 \\ &= -\frac{2}{3}+\frac{5}{18}+\frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{18} \end{aligned}$$

である。

〔3〕

(1)

$f(x)=x^3-ax^2-5a^2x$ とおく。

$$f'(x)=3x^2-2ax-5a^2=(3x-5a)(x+a)$$

である。$a>0$ より $-a<\dfrac{5}{3}a$ であることに注意すると，増減表は以下の通りとなる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は $x=-a$ で極大値 $f(-a)=-a^3-a^3+5a^3=3a^3$ を，$x=\dfrac{5}{3}a$ で極小値

$f\left(\dfrac{5}{3}a\right)=\dfrac{125}{27}a^3-\dfrac{25}{9}a^3-\dfrac{25}{3}a^3=-\dfrac{175}{27}a^3$ をとる。

(答) 増減表: 前表

極値: $x=-a$ で極大値 $3a^3$，$x=\dfrac{5}{3}a$ で極小値 $-\dfrac{175}{27}a^3$

(2)

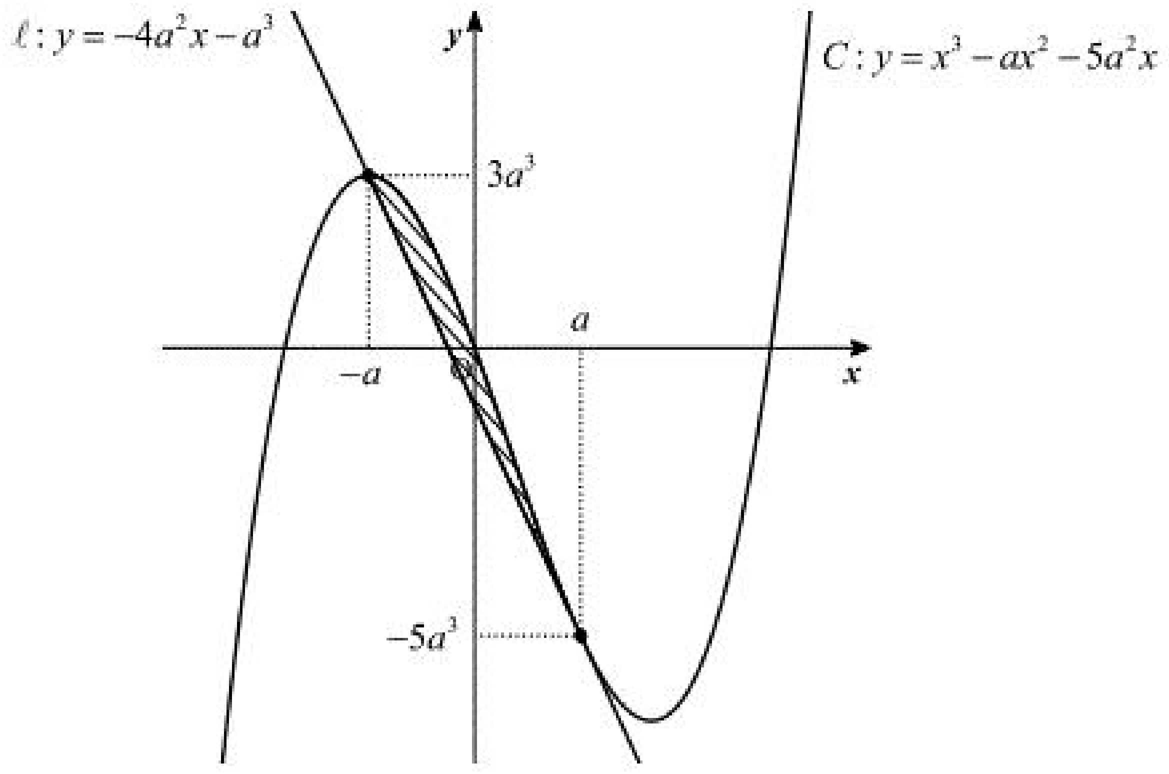
接線 ℓ の式は,

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$
$$\Leftrightarrow y+5a^3=-4a^2(x-a)$$
$$\Leftrightarrow y=-4a^2x-a^3$$

である。

(答) $y=-4a^2x-a^3$

(3)



接線 ℓ と曲線 C の交点の x 座標は,

$$x^3-ax^2-5a^2x=-4a^2x-a^3$$
$$\Leftrightarrow x^3-ax^2-a^2x+a^3=0$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2(x+a)=0$$

より，$x=-a, a$ である。よって接線 ℓ と曲線 C によって囲まれた部分は上図の斜線部となり，$1, x^2$ は偶関数，x, x^3 は奇関数であることに注意すると，その面積は,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\left\{\left(x^3-ax^2-5a^2x\right)-\left(-4a^2x-a^3\right)\right\}dx&=\int_{-a}^{a}\left(x^3-ax^2-a^2x+a^3\right)dx\\&=2\int_0^a\left(-ax^2+a^3\right)dx\\&=2\left[-\frac{a}{3}x^3+a^3x\right]_0^a\\&=2\left(-\frac{a^4}{3}+a^4\right)\\&=\frac{4}{3}a^4\end{aligned}$$

である。よって，$a>0$ に注意すれば，これが12となるのは,

$$\frac{4}{3}a^4=12$$
$$\Leftrightarrow a^4=9$$
$$\therefore a=\sqrt{3}$$

のときである。

(答) $a=\sqrt{3}$