〔1〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	4	2	$-\dfrac{1}{2}$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	8	$\sqrt{11}$	$9t^2+16t+11$	$\dfrac{\sqrt{35}}{3}$
(3)	ク	ケ	コ	
	80	$\dfrac{1792}{9}$	0	

〔解説〕

(1)

$x\to 1$ で $\dfrac{a\sqrt{x}-4}{x-1}$ の分母が 0 に収束するから，$\dfrac{a\sqrt{x}-4}{x-1}$ が有限な値に収束するには，分子も 0 に収束することが必要である。

$$\lim_{x\to 1}\left(a\sqrt{x}-4\right)=a-4$$

であるから，これには $a=4$ が必要である。逆に $a=4$ のとき，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}-4}{x-1}&=\lim_{x\to 1}4\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{x}+1}\\&=2\end{aligned}$$

となり，$\dfrac{a\sqrt{x}-4}{x-1}$ は確かに有限な値 2 に収束する。よって，$a=4$ である。また，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\sqrt{x^2-x}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-x\right)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(2)

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=6,\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2$ より，

$$\begin{aligned}&\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=32\\\Leftrightarrow&\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2=32\\\Leftrightarrow&4\vec{a}\cdot\vec{b}=32\\\Leftrightarrow&\vec{a}\cdot\vec{b}=8\end{aligned}$$

であり，これより，

$$\begin{aligned}&\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=36\\\Leftrightarrow&\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=36\\\Leftrightarrow&\left|\vec{a}\right|^2+16+9=36\\\Leftrightarrow&\left|\vec{a}\right|^2=11\\\Leftrightarrow&\left|\vec{a}\right|=\sqrt{11}\end{aligned}$$

である。ここで，

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2&=\left|\vec{a}\right|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\left|\vec{b}\right|^2\\&=9t^2+16t+11\\&=9\left(t+\frac{8}{9}\right)^2+\frac{35}{9}\end{aligned}$$

であるから，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ の最小値は $\dfrac{35}{9}$ である。$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\geqq 0$ より，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ が最小になるとき $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ も最小となるので，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ の最小値は $\sqrt{\dfrac{35}{9}}=\dfrac{\sqrt{35}}{3}$ である。

(3)

2 項定理より，

$$\begin{aligned}\left(x+2y\right)^5&=\sum_{k=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_k x^k\left(2y\right)^{5-k}\\&=\sum_{k=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_k\cdot 2^{5-k}\cdot x^k y^{5-k}\end{aligned}$$

であるから，これの x^2y^3 の係数は，$k=2$ の項を考えて，

$${}_5\mathrm{C}_2\cdot 2^3=80$$

である。また，

$$\begin{aligned}\left(2x-\frac{1}{3x^3}\right)^8&=\sum_{k=0}^{8}{}_8\mathrm{C}_k\left(2x\right)^k\left(-\frac{1}{3x^3}\right)^{8-k}\\&=\sum_{k=0}^{8}{}_8\mathrm{C}_k\cdot 2^k\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{8-k}\cdot x^{4k-24}\end{aligned}$$

であるから，これの定数項は，$k=6$ の項を考えて，

$${}_8\mathrm{C}_6\cdot 2^6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1792}{9}$$

である。また，

$$f'(x)=100\cdot(1+x)^{99}$$

であるが，2 項定理より，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{100}{}_{100}\mathrm{C}_k\cdot x^k\cdot 1^{100-k}=\sum_{k=0}^{100}{}_{100}\mathrm{C}_k x^k$$

であることに注意すれば，

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{100}k\,{}_{100}\mathrm{C}_k x^{k-1}$$

である。よって，

$$\sum_{k=1}^{100}k\,{}_{100}\mathrm{C}_k x^{k-1}=100\cdot(1+x)^{99}$$

である。$x=-1$ を代入すれば，

$$\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k-1}\cdot k\cdot{}_{100}\mathrm{C}_k=0$$

であることが分かる。

〔2〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
$\sqrt{2}$	$\dfrac{2x}{x^2+1}$	$\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$	$-\log 3$	$\log\dfrac{2}{3}$	$-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{3}{2}$	$3e^y-1$	$3e^y-y$	$(3-\log 3)\pi$

〔解説〕

$$\log\frac{x^2+1}{3}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{3}=1$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

であるから，C と x 軸との交点の x 座標は $\pm\sqrt{2}$ である。

$$f(x)=\log(x^2+1)-\log 3$$

であるから，

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$
$$f''(x)=\frac{2\cdot(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

である。よって，$0\leqq x$ での $f(x)$ の増減表は以下の通りとなる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\log 3$	⤴	$\log\dfrac{2}{3}$	⤴

$f(x)$ が偶関数であることに注意すれば，$f(x)$ の最小値は

$$f(0)=-\log 3$$

であり，変曲点の x 座標は ± 1 で，その y 座標は

$$f(\pm 1)=\log\frac{2}{3}$$

であることが分かる。また，

$$f'(\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

であるから，$\mathrm{A}(\sqrt{2},0)$ での法線である直線 m の方程式は，

$$(x-\sqrt{2},\ y)\cdot\left(1,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x-\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}y=0$$
$$\Leftrightarrow y=-\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{3}{2}$$

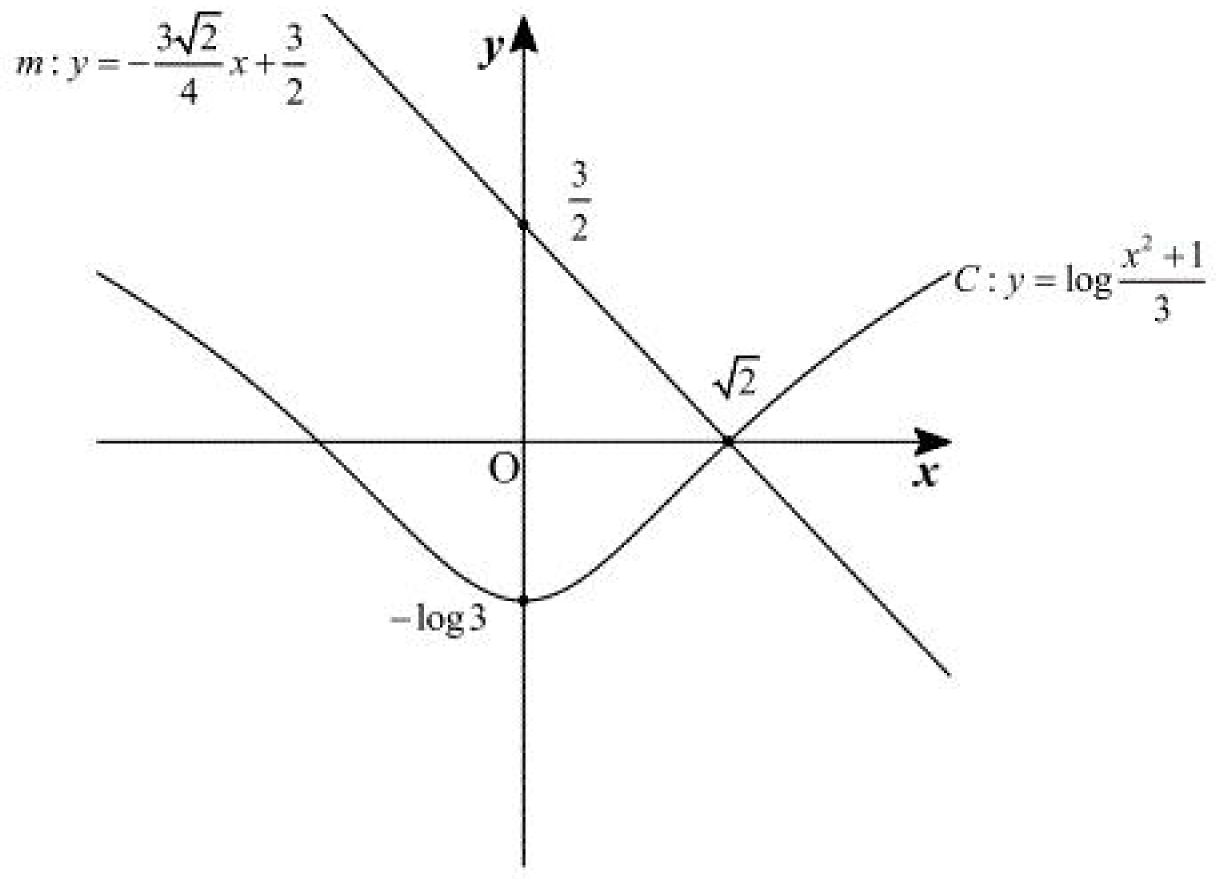
であり，これの傾きは $-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ である。また，これと y 軸との交点の y 座標は $\dfrac{3}{2}$ である。また，

$$y=\log\frac{x^2+1}{3}$$
$$\Leftrightarrow e^y=\frac{x^2+1}{3}$$
$$\Leftrightarrow x^2=3e^y-1$$

であるから，積分定数を c とすれば，

$$\int x^2dy=3e^y-y+c \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

である。



直線 m と曲線 C の位置関係は上図の通りである。ここで，

$$y=-\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}y+\sqrt{2}$$

であるから，曲線 C の $x\geqq 0$ の部分，直線 m，y 軸で囲まれる図形を y 軸の周りに1回転してできる立体の体積は，①の結果を用いると，

$$\pi\left[3e^y-y\right]_{-\log 3}^{0}+\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{3}{2}=\pi(3-1-\log 3)+\pi$$
$$=(3-\log 3)\pi$$

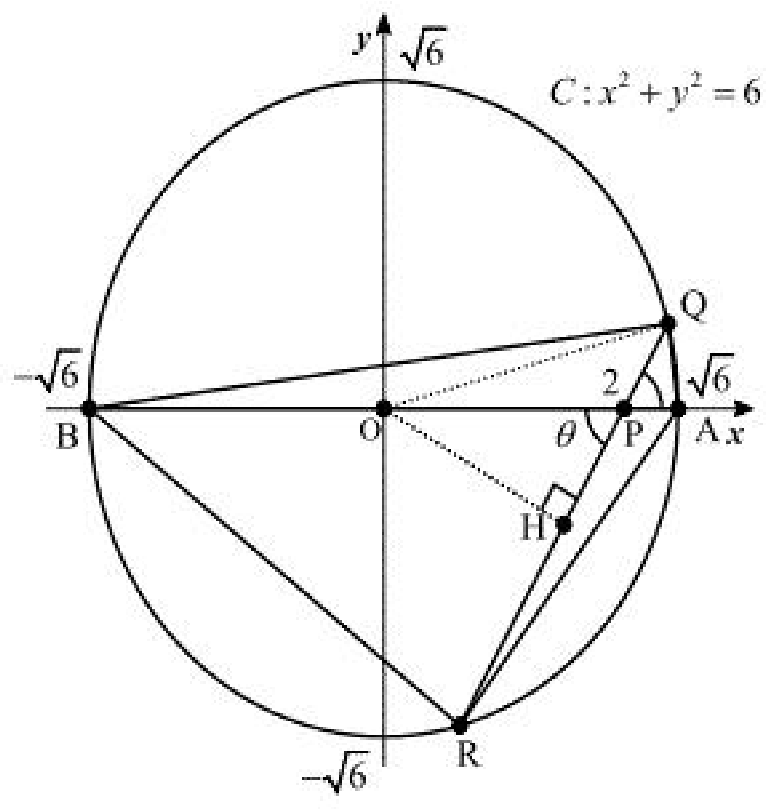
である。

〔3〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
$2\sin\theta$	$6-4\sin^2\theta$	$\sqrt{6}$	$9-6\sin^2\theta$	$\frac{\pi}{4}$	$48s(3-2s)$	$\frac{\pi}{3}$	$3\sqrt{6}$	$y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

〔解説〕



$$\angle\mathrm{OHP}=\frac{\pi}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\mathrm{OH}&=\mathrm{OP}\sin\theta\\&=2\sin\theta\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\mathrm{QH}&=\sqrt{\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OH}^2}\\&=\sqrt{6-4\sin^2\theta}\end{aligned}$$

である。また, 点Qの y 座標が $\mathrm{QP}\sin\theta$ であることから,

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{QP}\sin\theta\\&=\sqrt{6}\mathrm{QP}\sin\theta\end{aligned}$$

であり, 点Rの y 座標が $-\mathrm{PR}\sin\theta$ であることから,

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PR}\sin\theta\\&=\sqrt{6}\mathrm{PR}\sin\theta\end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned}S(\theta)&=S_1+S_2\\&=\sqrt{6}(\mathrm{QP}+\mathrm{PR})\sin\theta\\&=\sqrt{6}(\mathrm{QH}+\mathrm{RH})\sin\theta\\&=\sqrt{6}\cdot2\sqrt{6-4\sin^2\theta}\cdot\sin\theta\\&=4\sin\theta\sqrt{9-6\sin^2\theta}\end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned}&S(\theta)>4\sqrt{3}\\\Leftrightarrow\ &4\sin\theta\sqrt{9-6\sin^2\theta}>4\sqrt{3}\\\Leftrightarrow\ &\sin\theta\sqrt{3-2\sin^2\theta}>1\end{aligned}$$

であり, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\sin\theta>0$ であり, 両辺が正であるから, 辺々を二乗すると,

$$\begin{aligned}&\sin^2\theta(3-2\sin^2\theta)>1\\\Leftrightarrow\ &-2\sin^4\theta+3\sin^2\theta-1>0\\\Leftrightarrow\ &(2\sin^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)<0\\\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}<\sin^2\theta<1\\\Leftrightarrow\ &\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\theta<1\ (\because\sin\theta>0)\\\Leftrightarrow\ &\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

である。$s=\sin^2\theta,\ t=\{S(\theta)\}^2$ とおくと, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で $0<\sin\theta<1\Leftrightarrow0<s<1$ であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}t&=16\sin^2\theta(9-6\sin^2\theta)\\&=48s(3-2s)\\&=-96\left(s-\frac{3}{4}\right)^2+54\end{aligned}$$

より, t は $s=\frac{3}{4}$ のときに最大値54をとる。$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で $S(\theta)>0$ であるから, $S(\theta)$ を最大にする θ と $t=\{S(\theta)\}^2$ を最大にする θ は一致する。ここで,

$$\begin{aligned}&s=\frac{3}{4}\\\Leftrightarrow\ &\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because\sin\theta>0)\\\Leftrightarrow\ &\theta=\frac{\pi}{3}\ \left(\because0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

であるから, $S(\theta)$ は $\theta=\frac{\pi}{3}$ のときに最大値 $\sqrt{54}=3\sqrt{6}$ をとる。

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき, 直線QRの傾きは $\tan\theta=\sqrt{3}$ であり, これが点 $\mathrm{P}(2,0)$ を通るから, 直線QRの方程式は,

$$\begin{aligned}&y=\sqrt{3}(x-2)\\\Leftrightarrow\ &y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。点Qおよび点Rの x 座標は直線QRの方程式と円 C の方程式 $x^2+y^2=6$ から y を消去して,

$$\begin{aligned}&x^2+\{\sqrt{3}(x-2)\}^2=6\\\Leftrightarrow\ &4x^2-12x+6=0\\\Leftrightarrow\ &2x^2-6x+3=0\\\Leftrightarrow\ &x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となるが, 点Qの x 座標は点Rの x 座標より大きいので, 点Qの x 座標は $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ である。

〔4〕

(1)

$$a_{n+1}=4a_n+b_n \qquad ・・・①$$
$$b_{n+1}=2a_n+3b_n \qquad ・・・②$$

より，①－②から，

$$a_{n+1}-b_{n+1}=2a_n-2b_n$$
$$\Leftrightarrow c_{n+1}=2c_n$$

であり，

$$c_1=a_1-b_1=6-3=3$$

であるから，数列$\{c_n\}$は初項3，公比2の等比数列である。よって，

$$c_n=3\cdot 2^{n-1}$$

である。

(答) $c_n=3\cdot 2^{n-1}$

(2)

(1)より，

$$a_n-b_n=3\cdot 2^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow b_n=a_n-3\cdot 2^{n-1}$$

であるから，これを式①に代入して，

$$a_{n+1}=4a_n+a_n-3\cdot 2^{n-1}$$
$$=5a_n-3\cdot 2^{n-1}$$

となる。

(答) $a_{n+1}=5a_n-3\cdot 2^{n-1}$

(3)

(2)より $a_{n+1}=5a_n-3\cdot 2^{n-1}$ である。 $2^{n+1}>0$ より，この式の辺々を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}-\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow d_{n+1}=\frac{5}{2}d_n-\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow d_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\left(d_n-\frac{1}{2}\right)$$

となる。 $d_1-\frac{1}{2}=\frac{a_1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ より，数列$\left\{d_n-\frac{1}{2}\right\}$は，初項$\frac{5}{2}$，公比$\frac{5}{2}$の等比数列であるから，

$$d_n-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow d_n=\left(\frac{5}{2}\right)^n+\frac{1}{2}$$

である。

(答) $d_n=\left(\frac{5}{2}\right)^n+\frac{1}{2}$

(4)

(3)の結果より，

$$a_n=2^n d_n$$
$$=5^n+2^{n-1}$$

であり，これと(1)の結果より，

$$b_n=a_n-c_n$$
$$=5^n+2^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}$$
$$=5^n-2^n$$

である。

(答) $a_n=5^n+2^{n-1}$
$b_n=5^n-2^n$