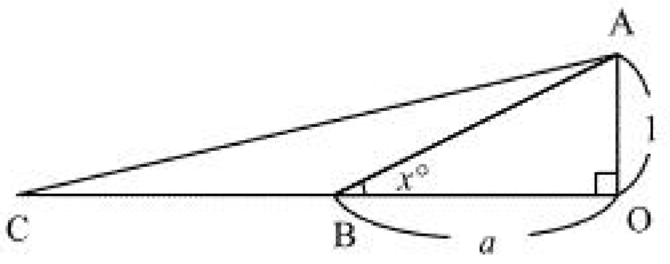
〔1〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$\frac{x}{2}$	$\sqrt{1+a^2}$	$\sqrt{1+a^2}-a$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	1286	257	2829	6171	9976

〔解説〕

(1)



上図において，△ABC は AB = BC を満たす二等辺三角形であるから

$$\angle \mathrm{OCA} = \angle \mathrm{BCA}$$

となるため，∠OCA を x を用いて表すと

$$\angle \mathrm{OCA} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{OBA} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\circ}$$

である。また，△OAB について三平方の定理を用いることで，線分 BC の長さを a を用いて表すと

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2} = \sqrt{1+a^2}$$

となることから，三角関数の定義より，$\tan\angle \mathrm{OCA}$ の値は

$$\tan\angle \mathrm{OCA} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}} = \frac{1}{a+\sqrt{1+a^2}} = \sqrt{1+a^2}-a$$

となる。このことを用いると

$x = 30$ のとき $a = \sqrt{3}$ であるから，$\tan 15° = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{3} = 2-\sqrt{3}$

$x = 45$ のとき $a = 1$ であるから，$\tan 22.5° = \sqrt{1+1^2} - 1 = \sqrt{2}-1$

であることがわかる。

(2)

4 桁の自然数のうち，条件とそれを満たす集合，その要素の個数をまとめると以下の表のようになる。

条件	集合	個数
5 の倍数	$A = \{1000, 1005, \cdots, 9995\}$	$\frac{9995-1000}{5}+1 = 1800$
7 の倍数	$B = \{1001, 1008, \cdots, 9996\}$	$\frac{9996-1001}{7}+1 = 1286$
5 の倍数かつ 7 の倍数 (35 の倍数)	$A \cap B = \{1015, 1050, \cdots, 9975\}$	$\frac{9975-1015}{35}+1 = 257$
5 の倍数または 7 の倍数	$A \cup B$	$1800+1286-257 = 2829$
35 と互いに素である自然数 (5 の倍数でも 7 の倍数でない)	$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$	$9000-2829 = 6171$
5 で割っても 7 で割っても 1 余る自然数 (35 で割って 1 余る自然数)	$C = \{1016, 1051, \cdots, 9976\}$	

したがって，4 桁の自然数のうち

7 の倍数は 1286 個

35 の倍数は 257 個

7 の倍数または 5 の倍数である数は 2829 個

35 と互いに素である自然数は 6171 個

5 で割っても 7 で割っても 1 余る自然数のうち最大の数は 9976

であることがわかる。

〔２〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	1	$\frac{25}{4}$	8	$\frac{61}{8}$	$-\frac{39}{2}$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	5	4	$-8\cdot5^{n-1}+9\cdot4^{n-1}$	$4\cdot5^{n-1}-3\cdot4^{n-1}$	5^n-4^n

〔解説〕

(1)

対数関数における底の変換公式を用いて，自然対数に直すことで

$$(\log_x y)(\log_y z)(\log_z x)=\frac{\log y}{\log x}\cdot\frac{\log z}{\log y}\cdot\frac{\log x}{\log z}=1 \qquad \cdots①$$

が成り立つことがわかる。また，1でない正の数 x, y, z が

$$\begin{cases}\log_x y+\log_y z+\log_z x=\dfrac{1}{2} & \cdots②\\ \log_y x+\log_z y+\log_x z=-3 & \cdots③\end{cases}$$

を満たすとき，$\log_x y, \log_y z, \log_z x, \log_y x, \log_z y, \log_x z$ はいずれも0ではないから，0でない実数 p, q, r を用いて

$$p=\log_x y,\ q=\log_y z,\ r=\log_z x$$

とおくと，①，②，③は

$$①\Leftrightarrow pqr=1$$

$$②\Leftrightarrow p+q+r=\frac{1}{2}$$

$$③\Leftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=-3$$

と書きかえることができる。このとき，求める値は①，②，③より

$$\begin{aligned}p^2+q^2+r^2&=(p+q+r)^2-2(pq+qr+rp)\\&=(p+q+r)^2-2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\ (\because pqr=1)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2(-3)\\&=\frac{25}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{p}\right)^2+\left(\frac{1}{q}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2&=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)^2-2\left(\frac{1}{pq}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{rp}\right)\\&=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)^2-2(p+q+r)\ (\because pqr=1)\\&=(-3)^2-2\cdot\frac{1}{2}\\&=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p^3+q^3+r^3&=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)+3pqr\\&=(p+q+r)\left\{(p^2+q^2+r^2)-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\right\}+3pqr\ (\because pqr=1)\\&=\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{25}{4}-(-3)\right\}+3\\&=\frac{61}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{p}\right)^3+\left(\frac{1}{q}\right)^3+\left(\frac{1}{r}\right)^3&=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^2+\left(\frac{1}{q}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2-\frac{1}{pq}-\frac{1}{qr}-\frac{1}{rp}\right\}+\frac{3}{pqr}\\&=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^2+\left(\frac{1}{q}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2-(p+q+r)\right\}+\frac{3}{pqr}\ (\because pqr=1)\\&=(-3)\cdot\left(8-\frac{1}{2}\right)+3\\&=-\frac{39}{2}\end{aligned}$$

と計算できる。

(2)

与えられた漸化式より

$$\begin{aligned}a_{n+1}+3b_{n+1}&=2(a_n-3b_n)+3(a_n+7b_n)\\&=5a_n+15b_n\\&=5(a_n+3b_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n+1}+2b_{n+1}&=2(a_n-3b_n)+2(a_n+7b_n)\\&=4a_n+8b_n\\&=4(a_n+2b_n)\end{aligned}$$

となる。以上より，数列 $\{a_n+3b_n\}$ は初項 $a_1+3b_1=4$，公比5の等比数列であり，数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 $a_1+2b_1=3$，公比4の等比数列であるから

$$\begin{cases}a_n+3b_n=4\cdot5^{n-1}\\a_n+2b_n=3\cdot4^{n-1}\end{cases}$$

とわかる。この連立方程式を解くことで，数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{cases}a_n=-8\cdot5^{n-1}+9\cdot4^{n-1}\\b_n=4\cdot5^{n-1}-3\cdot4^{n-1}\end{cases}$$

と求まる。また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}b_k\\&=\sum_{k=1}^{n}(4\cdot5^{k-1}-3\cdot4^{k-1})\\&=\frac{4-4\cdot5^n}{1-5}-\frac{3-3\cdot4^n}{1-4}\\&=5^n-4^n\end{aligned}$$

である。

〔3〕

(1)

関数 $f(x)=-x^3+ax$ の導関数を計算すると

$$f'(x)=-3x^2+a$$

となるから，接線 ℓ_1, ℓ_2 の方程式は

$$\ell_1:\ y=f'(0)(x-0)+f(0)\Leftrightarrow y=ax$$

$$\ell_2:\ y=f'(a)(x-a)+f(a)\Leftrightarrow y=\left(-3a^2+a\right)x+2a^3$$

と求まる。したがって，これらの交点Qの座標は

$$\begin{cases} y=ax \\ y=\left(-3a^2+a\right)x+2a^3 \end{cases}\Leftrightarrow (x,\ y)=\left(\frac{2}{3}a,\ \frac{2}{3}a^2\right)$$

であることがわかる。

(答) $\mathrm{Q}\left(\frac{2}{3}a,\ \frac{2}{3}a^2\right)$

(2)

2次関数 $g(x)$ を $g(x)=px^2+qx+r\ (p\neq 0)$ とおく。このとき，3点O, P, Qを通る条件から

$$\begin{cases} r=0 \\ a^2p+aq+r=-a^3+a^2 \\ \frac{4}{9}a^2p+\frac{2}{3}aq+r=\frac{2}{3}a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (p,\ q,\ r)=\left(-3a,\ 2a^2+a,\ 0\right)$$

と連立方程式が解けるから，求める関数 $g(x)$ は

$$g(x)=-3ax^2+\left(2a^2+a\right)x$$

である。

(答) $g(x)=-3ax^2+\left(2a^2+a\right)x$

(3)

関数 $h(x)$ を $h(x)=g(x)-f(x)$ とおく。このとき

$$h(x)=0$$
$$\Leftrightarrow x^3-3ax^2+2a^2x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-a)(x-2a)=0$$

となり，$a>0$ より $h(x)$ の符号変化は以下の表のようになる。

x の範囲	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$h(x)$ の符号	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

したがって，曲線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ で囲まれた部分は $0\leqq x\leqq a$ と $a\leqq x\leqq 2a$ の部分であることがわかり，それらの面積の和は

$$\int_0^a h(x)dx+\int_a^{2a}-h(x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-ax^3+a^2x^2\right]_0^a+\left[-\frac{x^4}{4}+ax^3-a^2x^2\right]_a^{2a}$$
$$=\frac{a^4}{4}-\left(-\frac{a^4}{4}\right)$$
$$=\frac{a^4}{2}$$

と求まる。

(答) $\frac{a^4}{2}$