〔1〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	6	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{6}}{3}$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{4}{9}$	42	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{54}$

〔解説〕

(1)

△ABCにおいて余弦定理を用いることで

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$= 36$$
$$\therefore \mathrm{AC} = 6$$

と求まる。また，同じく余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}} = \frac{2}{3}$$

となる。△BCDと△ABDは辺BDを共通とするので，その面積比は線分AEと線分ECの長さの比に等しく，

$$\mathrm{AE} : \mathrm{EC} = 1 : 2$$

となるから，

$$\mathrm{AE} = \frac{1}{3}\mathrm{AC} = 2$$

とわかる。ここで，△ABEにおいて余弦定理を用いることで

$$\mathrm{BE}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AE}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AE}\cos\angle\mathrm{BAE}$$
$$= \frac{8}{3}$$
$$\mathrm{BE} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

とわかる。また，$\mathrm{DE} = x$とおくと，方べきの定理より

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EC} = \mathrm{BE}\cdot\mathrm{ED}$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot 4 = \frac{2\sqrt{6}}{3}x$$
$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{6}$$

であるから

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BE} + \mathrm{DE} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

となる。

(2)

1, 2, 3, 4のいずれかの目が出る確率は$\frac{2}{3}$であるから，2回ともAから玉を取り出す確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

である。1から7まで全部で7つの番号があるので，Xの取り得る値は全部で

$7\cdot 6 = 42$ (個)

ある。ここでXが偶数になるときを考える。2回ともAから取り出すとき，2回目に取り出す玉は2であるから，その確率は

$$\frac{3\cdot 1}{4\cdot 3} = \frac{1}{4}$$

である。1回目をA，2回目をBから取り出すとき，2回目に取り出す玉は4または6であるから，

$$\frac{4\cdot 2}{4\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

であり，1回目をB，2回目をAから取り出すとき

$$\frac{3\cdot 1}{3\cdot 4} = \frac{1}{4}$$

である。2回ともBから取り出すときは，

$$\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{2}{3}$$

であるから，Xが偶数である確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{18}$$

となる。次にXが3の倍数となるときを考える。2回ともAから取り出すとき，取り出す玉の組み合わせが，$(2, 7)$または$(5, 7)$となればよいから，その確率は，

$$\frac{2\cdot 2}{4\cdot 3} = \frac{1}{3}$$

である。また，A, Bから1回ずつ取り出す場合，取り出す玉の組み合わせは$(2, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(5, 1)$, $(5, 4)$の5通りであり，2回ともBから取り出すときには3の倍数とならないことに注意すると，Xが3の倍数となる確率は，

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{4\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 4}\right) = \frac{1}{3}$$

である。また，素数になるXは

$X = 13, 17, 23, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 61, 67, 71, 73$

であり，この中で2回ともAから取り出すものは$X = 23, 37, 53, 73$の4個，1回目をA，2回目をBから取り出すものは$X = 31, 71$の2個である。また，1回目をB，2回目をAから取り出すものは$X = 13, 17, 43, 47, 67$の5個，2回ともBから取り出すものは$X = 41, 61$の2個であるから，素数である確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{4\cdot 3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{4\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3\cdot 2} = \frac{17}{54}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$(1, 0)$	$(3, 4)$	$\sqrt{5\left(a^2-2a+2\right)}$	$\sqrt{5}$	$-\dfrac{x}{2}+3$
(2)	カ	キ	ク		
	$(2n-1)(2n+1)(2n+3)$	$\dfrac{13n^2-4}{3(2n-1)(2n+1)}$	$\dfrac{13n^2-4}{3}$		
	ケ	コ			
	$\dfrac{n\left(26n^2+39n-11\right)}{18}$	$\dfrac{n(n+1)\left(13n^2+13n-8\right)}{12}$			

〔解説〕

(1)

$$\begin{cases} x^2+y^2-6y-1=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$$

を満たす (x, y) では a の値に関わらず与式を満たす。y を消去すると

$$x^2+(2x-2)^2-6(2x-2)-1=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0$$
$$\therefore x=1,\ 3$$

となるので

$$\mathrm{P}(1, 0),\ \mathrm{Q}(3, 4)$$

が得られる。また，与式を変形すると

$$(x-2a)^2+\{y+(a-3)\}^2=1-4a+(2a)^2+(a-3)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-2a)^2+\{y+(a-3)\}^2=5a^2-10a+10$$
$$\Leftrightarrow (x-2a)^2+\{y+(a-3)\}^2=5\left(a^2-2a+2\right)$$

となるので，円の半径は $\sqrt{5\left(a^2-2a+2\right)}$ である。ここで，

$$a^2-2a+2=(a-1)^2+1$$

であるから，$a=1$ のとき，半径は最小値 $\sqrt{5}$ をとる。また，円の中心の座標を (X, Y) とすると

$$\begin{cases} X=2a \\ Y=-a+3 \end{cases}$$

であるから，a を消去して

$$Y=-\frac{X}{2}+3$$

となるので，円 C の中心は直線 $y=-\dfrac{x}{2}+3$ 上を動くことがわかる。

(2)

$$\begin{cases} a_n=(2n-1)(2n+1)b_n \\ a_{n+1}=(2n+1)(2n+3)b_{n+1} \end{cases}$$

を与えられた漸化式に代入すると，

$$(2n+1)(2n+3)b_{n+1}=(2n+1)(2n+3)b_n+\frac{1}{2n-1}$$
$$\Leftrightarrow b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

となる。ここで，

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{p}{2n-1}+\frac{q}{2n+1}+\frac{r}{2n+3}$$

とおき，両辺に $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ をかけると，

$$1=(2n+1)(2n+3)p+(2n-1)(2n+3)q+(2n-1)(2n+1)r$$

となる。$n=\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}$ をそれぞれ代入することで，

$$p=\frac{1}{8},\ q=-\frac{1}{4},\ r=\frac{1}{8}$$

と求まる。したがって，

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)$$

であるから，$n \geqq 2$ において数列 $\{b_n\}$ は

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{3}{1\cdot 3}+\frac{1}{8}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{2}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=1+\frac{1}{8}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-1}-\frac{2}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{13n^2-4}{3(2n-1)(2n+1)}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つので，一般項は

$$b_n=\frac{13n^2-4}{3(2n-1)(2n+1)}$$

である。$a_n=(2n-1)(2n+1)b_n$ より，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{13n^2-4}{3}$$

である。これより

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\frac{1}{3}\left\{13\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}1\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{13}{6}n(n+1)(2n+1)-4n\right\}$$
$$=\frac{n\left(26n^2+39n-11\right)}{18}$$

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k=\frac{1}{3}\left\{13\sum_{k=1}^{n}k^3-4\sum_{k=1}^{n}k\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left[13\cdot\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$=\frac{n(n+1)\left(13n^2+13n-8\right)}{12}$$

である。

〔3〕

(1)

$g(a)=-1$ より

$$a^2-2a+\int_a^a f(t)\,dt=-1$$
$$\Leftrightarrow a^2-2a+0=-1$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2=0$$
$$\therefore a=1$$

である。

(答) $a=1$

(2)

$b=\int_0^2 g(t)\,dt$ とおくと

$$f(x)=4x-5+b$$

と表すことができる。これを $g(x)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned} g(x)&=x^2-2x+\int_1^x(4t-5+b)\,dt \\ &=x^2-2x+\left[2t^2+(b-5)t\right]_1^x \\ &=3x^2+(b-7)x+3-b \end{aligned}$$

となる。これを $b=\int_0^2 g(t)\,dt$ に代入して

$$b=\int_0^2\left\{3t^2+(b-7)t+3-b\right\}dt$$
$$\Leftrightarrow b=\left[t^3+\frac{b-7}{2}t^2+(3-b)t\right]_0^2$$
$$\Leftrightarrow b=8+2(b-7)+2(3-b)$$
$$\therefore b=0$$

となる。よって

$$f(x)=4x-5,\ g(x)=3x^2-7x+3$$

である。

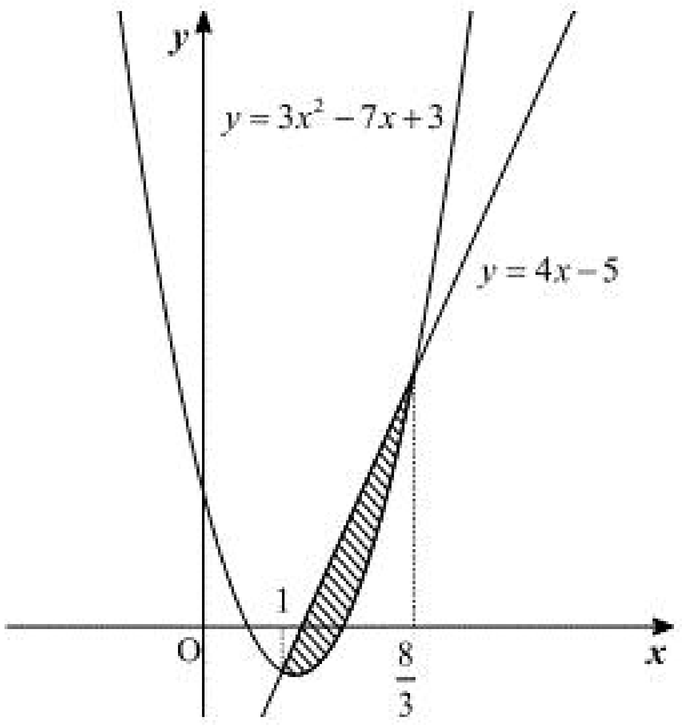
(答) $f(x)=4x-5,\ g(x)=3x^2-7x+3$

(3)

直線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の交点の x 座標は

$$4x-5=3x^2-7x+3$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-11x+8=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(3x-8)=0$$
$$\therefore x=1,\ \frac{8}{3}$$

である。よって，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフを図示すると以下のようになる。



したがって，求める面積は，

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{8}{3}}\left\{f(x)-g(x)\right\}dx&=-3\int_1^{\frac{8}{3}}(x-1)\left(x-\frac{8}{3}\right)dx \\ &=\frac{3}{6}\left(\frac{8}{3}-1\right)^3 \\ &=\frac{125}{54} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{125}{54}$