

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{9}$

【解説】

(1)

x の値に応じて次のように場合分けし、①を解く。

[1] $x \geq \frac{3}{4}$ のとき

$|4x-3|=4x-3$ より、 $4x-3 < 2x+1 \Leftrightarrow x < 2$ である。これと $x \geq \frac{3}{4}$ より、求める x の値の範

囲は、 $\frac{3}{4} \leq x < 2$ となる。

[2] $x < \frac{3}{4}$ のとき

$|4x-3|=-4x+3$ より、 $-4x+3 < 2x+1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$ である。これと $x < \frac{3}{4}$ より、求める x の値の

範囲は、 $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{4}$ となる。

[1], [2] より、①を解くと、 $\frac{1}{3} < x < 2$ となる。また、②を満たす x が存在する条件は、2 次方程

式 $\frac{1}{2}x^2+2ax+1-2a^2=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことであるから、判別式を D として、

$$D > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{1}{2}(1-2a^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - \frac{1}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 > 1$$

$$\therefore a < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a$$

となる。また、①を満たす整数 x は、 $\frac{1}{3} < x < 2$ より、 $x=1$ のみである。よって $x=1$ が②を満

たすような a の値の範囲を求めると、

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 1 - 2a^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)(2a-3) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{1}{2}, a > \frac{3}{2}$$

である。

(2)

2 個のサイコロを同時に投げて出る目の組み合わせは 6^2 通りあり、いずれも同様に確からし

い。 $y=ax$, $y=-bx+30$ の交点の x 座標は、

$$ax = -bx + 30$$

$$\Leftrightarrow (a+b)x = 30$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{30}{a+b}$$

であり、 x が整数であれば、 a が整数であることから $y=ax=-bx+30$ も整数となる。よって、

x, y がどちらも整数となるための必要十分条件は、 $a+b$ が 30 の約数となることである。 1

$\leq a \leq 6$, $1 \leq b \leq 6$ より、 $2 \leq a+b \leq 12$ であるから、 $a+b=2, 3, 5, 6, 10$ が考えられる。

[1] $a+b=2$ のとき

考えられる (a, b) の組み合わせは、 $(1, 1)$ の 1 通りある。

[2] $a+b=3$ のとき

考えられる (a, b) の組み合わせは、 $(1, 2), (2, 1)$ の 2 通りある。

[3] $a+b=5$ のとき

考えられる (a, b) の組み合わせは、 $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ の 4 通りある。

[4] $a+b=6$ のとき

考えられる (a, b) の組み合わせは、 $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ の 5 通りある。

[5] $a+b=10$ のとき

考えられる (a, b) の組み合わせは、 $(4, 6), (5, 5), (6, 4)$ の 3 通りある。

[1]~[5] より、求める確率は、

$$\frac{1+2+4+5+3}{6^2} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

である。 $a=4$ となるのは $(4, 1), (4, 2), (4, 6)$ の 3 通りであるから、 x, y がどちらも整数であ

ったとき、 $a=4$ である条件付き確率は、

$$\frac{\frac{3}{6^2}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}$$

である。また、 $a=2b$ となるのは $(2, 1), (4, 2)$ の 2 通りであるから、 x, y がどちらも整数であ

ったとき、 $a=2b$ である条件付き確率は、

$$\frac{\frac{2}{6^2}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{15}$$

となる。 x が整数とならず y が整数となるのは、 $x=\frac{30}{a+b}, y=\frac{30a}{a+b}$ より、 $\frac{30}{a+b}$ が整数とな

らず、かつ $\frac{30a}{a+b}$ が整数となるときである。 $a+b$ が 30 の約数となるとき、 x は整数となり不

適である。ゆえに $a+b$ は 30 の約数ではない。以下、 $a+b$ の値で場合分けして考える。

[1] $a+b=4$ のとき

$\frac{30a}{4} = \frac{15}{2}a$ が整数となるような (a, b) の組み合わせは、 $(2, 2)$ の 1 通りある。

[2] $a+b=7$ のとき

$\frac{30a}{7}$ が整数となるような (a, b) は存在しない。

[3] $a+b=8$ のとき

$\frac{30a}{8} = \frac{15}{4}a$ が整数となるような (a, b) の組み合わせは、 $(4, 4)$ の 1 通りある。

[4] $a+b=9$ のとき

$\frac{30a}{9} = \frac{10}{3}a$ が整数となるような (a, b) の組み合わせは、 $(3, 6), (6, 3)$ の 2 通りある。

[5] $a+b=11$ のとき

$\frac{30}{11}a$ が整数となるような (a, b) の組み合わせは存在しない。

[6] $a+b=12$ のとき

$\frac{30a}{12} = \frac{5}{2}a$ が整数となる (a, b) の組み合わせは、 $(6, 6)$ の 1 通りある。

[1]~[6] より、求める確率は、

$$\frac{1+1+2+1}{6^2} = \frac{5}{36}$$

である。 x が整数であれば y も整数となるから、 x が整数とならず y も整数とならない事象

は、 x, y がどちらも整数になる、または x は整数とならず y が整数となる事象の余事象であ

る。したがって、 x が整数とならず y も整数とならない確率は、

$$1 - \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{36} \right) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

である。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$4\sqrt{2}$	$-\frac{1}{12}$	1	2	$\sqrt{2}$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	2	$\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\left(-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}+\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{3}\right)\vec{c}$	$\frac{1}{3}$

〔解説〕

(1)

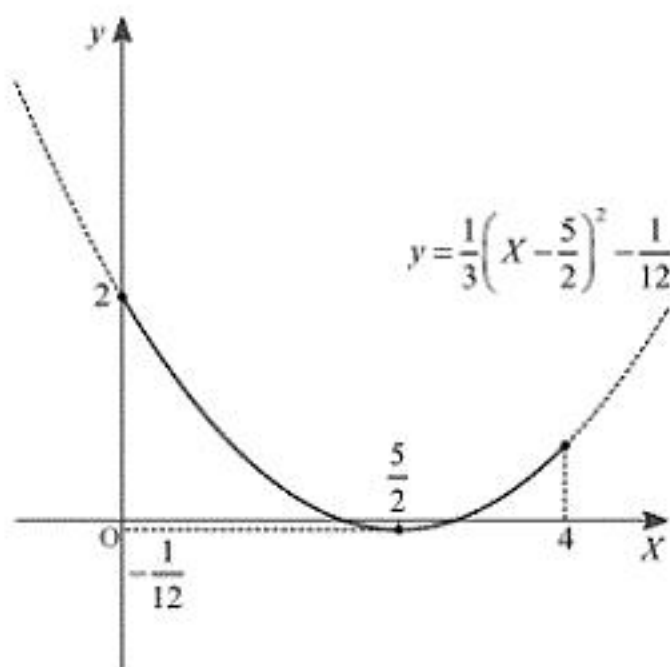
与式より、

$$\begin{aligned} y &= \left(\log_2 \frac{x}{4} \right) \left(\log_8 \frac{x}{8} \right) \\ \Leftrightarrow y &= (\log_2 x - 2)(\log_8 x - 1) \\ \Leftrightarrow y &= (\log_2 x - 2) \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 8} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow y &= (\log_2 x - 2) \left(\frac{1}{3} \log_2 x - 1 \right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $\log_2 x = X$ とおくと、 $1 \leq x \leq 16$ より、 $0 \leq X \leq 4$ であり、

$$\begin{aligned} y &= (X - 2) \left(\frac{1}{3} X - 1 \right) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{3} X^2 - \frac{5}{3} X + 2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{3} \left(X - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \end{aligned}$$

と表せる。 $0 \leq X \leq 4$ の範囲で $y = \frac{1}{3} \left(X - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{1}{12}$ のグラフを描くと下図のようになる。



したがって、最小値は $X = \frac{5}{2}$ すなわち $x = 4\sqrt{2}$ のとき $-\frac{1}{12}$ 、最大値は $X = 0$ すなわち $x = 1$ のとき 2 をとる。また

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} X^2 - \frac{5}{3} X + 2 &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow 4X^2 - 20X + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2X - 1)(2X - 9) &= 0 \end{aligned}$$

で $0 \leq X \leq 4$ より、 $X = \frac{1}{2}$ である。ゆえに $x = \sqrt{2}$ のとき、 $y = \frac{4}{5}$ となる。

(2)

四面体 OABC は一辺の長さが 2 の正四面体であるから、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ であり、 $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角は 60° である。したがって、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

である。また、 $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OE} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$ であるから、

$$\overrightarrow{DE} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}$$

となる。OABC は正四面体より、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 2$ であるから、DE の長さは、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DE}| &= \sqrt{\left(\frac{-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a}}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{2^2 + 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2}{4}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。また、 $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3} \vec{c}$ より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} \\ &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{OF} \\ &= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} s - \frac{1}{3} \vec{c} \\ &= \left(-\frac{1}{2} s + \frac{1}{2} \right) \vec{a} + \frac{1}{2} s \vec{b} + \left(\frac{1}{2} s - \frac{1}{3} \right) \vec{c} \end{aligned}$$

である。FG が DE と直交するとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{DE} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(-\frac{1}{2} s + \frac{1}{2} \right) \vec{a} + \frac{1}{2} s \vec{b} + \left(\frac{1}{2} s - \frac{1}{3} \right) \vec{c} \right\} \cdot \frac{-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} s - \frac{1}{4} \right) |\vec{a}|^2 + \frac{1}{4} s |\vec{b}|^2 + \left(\frac{1}{4} s - \frac{1}{6} \right) |\vec{c}|^2 + \left(-\frac{1}{4} s + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} s \right) \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{1}{4} s - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} s \right) \vec{b} \cdot \vec{c} + \left(-\frac{1}{4} s + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} s + \frac{1}{6} \right) \vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} s - \frac{1}{4} \right) \cdot 4 + \frac{1}{4} s \cdot 4 + \left(\frac{1}{4} s - \frac{1}{6} \right) \cdot 4 + \left(-\frac{1}{4} s + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} s \right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{4} s - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} s \right) \cdot 2 + \left(-\frac{1}{4} s + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} s + \frac{1}{6} \right) \cdot 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (s - 1) + s + \left(s - \frac{2}{3} \right) + \left(-s + \frac{1}{2} \right) + \left(s - \frac{1}{3} \right) + \left(-s + \frac{5}{6} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2s - \frac{2}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

[3]

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6ax - a \text{ であるから, 接線 } \ell \text{ の式は,} \\ y &= (6a^2 - 6a \cdot a - a)(x - a) + 2a^3 - 3a \cdot a^2 - a \cdot a + a^3 + a \\ &\Leftrightarrow y = -ax + a^2 + 2a^3 - 3a^3 - a^2 + a^3 + a \\ &\Leftrightarrow y = -ax + a \end{aligned}$$

と表せる。

(答) $y = -ax + a$

(2)

$$\begin{aligned} -ax + a &= x^2 + 8 \\ \Leftrightarrow x^2 + ax + 8 - a &= 0 \end{aligned}$$

である。接線 ℓ と放物線 $y = x^2 + 8$ の共有点の個数が1個であるのは、2次方程式 $x^2 + ax + 8 - a = 0$ が重解をもつときであるから、判別式を D として

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4(8 - a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 4a - 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 8)(a - 4) &= 0 \\ \therefore a &= 4 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 4$

(3)

$a = 4$ のとき, $f'(x) = 6x^2 - 6ax - a = 6x^2 - 24x - 4$ であるから, $f'(x) = 0$ とすると,

$$\begin{aligned} 6x^2 - 24x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - (-2) \cdot 3}}{3} = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{3} \end{aligned}$$

である。このとき, $y = f(x)$ の増減表は下のようになり, $x = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{3}$ のとき極値をとる。

x	...	$\frac{6 - \sqrt{42}}{3}$	...	$\frac{6 + \sqrt{42}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

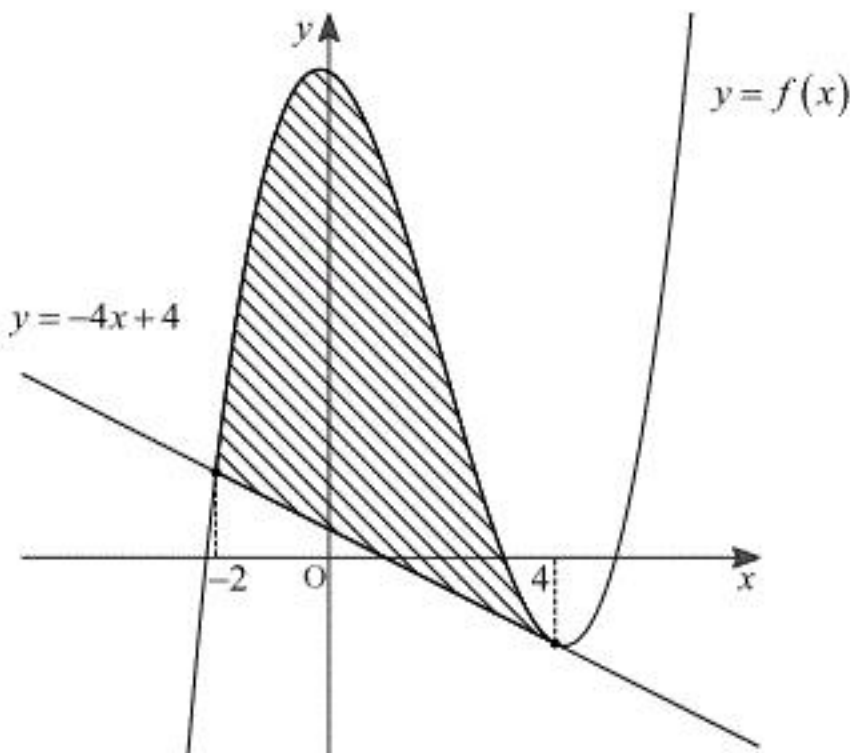
(答) $x = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{3}$

(4)

$y = f(x)$ と接線 ℓ のもう一つの交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3 \cdot 4x^2 - 4x + 4^3 + 4 &= -4x + 4 \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 64 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 4)^2(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

より, $x = -2$ であるから, 下図の斜線部の面積を求めればよい。



したがって, 求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 \{f(x) - (-4x + 4)\} dx &= \int_{-2}^4 2(x - 4)^2(x + 2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x - 4)^3(x + 2) \right]_{-2}^4 - \int_{-2}^4 \frac{2}{3}(x - 4)^3 dx \\ &= 0 - \left[\frac{2}{12}(x - 4)^4 \right]_{-2}^4 \\ &= \frac{(-6)^4}{6} \\ &= 216 \end{aligned}$$

となる。

(答) 216