

【1】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	4	3	4	
(2)	エ	オ	カ	
	$t \geq 2\sqrt{2}$	$t^2 - 4t$	$2 + \sqrt{2}$	
(3)	キ	ク	ケ	コ
	$(-1 + r, r)$	3	15	$\frac{3(2 - \sqrt{2})}{2}$

〔解説〕

(1)

$x > 0$ であることに注意し、 $x = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} x^2 &= 7 + 4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow x^2 &= (2 + \sqrt{3})^2 \\ \therefore x &= \sqrt{4} + \sqrt{3} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

となるから、 $a = 4, b = 3$ である。また、このとき、 $x = 2 + \sqrt{3}$ であり、

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= (2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \\ &= 2 + \sqrt{3} + \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。

(2)

x についての連続関数 $t = x + \frac{2}{x}$ ($x > 0$)に関して

$$t' = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

である。また

$$\lim_{x \rightarrow +0} t = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} t = \infty$$

であるから、 t の増減表は下図のようになる。

x	(0)	...	$\sqrt{2}$	...	(∞)
t'		-	0	+	
t	(∞)		$2\sqrt{2}$		(∞)

したがって、求める範囲は $t \geq 2\sqrt{2}$ である。また、 $\frac{P(x)}{x^2}$ を t の式で表すと、

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{x^2} &= \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 8x + 4}{x^2} \\ &= x^2 - 4x + 4 - \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} \\ &= \left(x^2 + \frac{4}{x^2} + 4\right) - \left(4 + \frac{8}{x}\right) \\ &= \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{2}{x}\right) \\ &= t^2 - 4t \end{aligned}$$

となる。 $x > 0$ より、 $P(x) = 0$ の解は $\frac{P(x)}{x^2} = 0$ の解に一致する。上式と $t \geq 2\sqrt{2}$ より、

$\frac{P(x)}{x^2} = 0$ の解は $t = 4$ であるから、 $t = x + \frac{2}{x}$ より、

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{x} &= 4 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 &= 0 \quad (\because x > 0) \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

を得る。得られた解はいずれも $x > 0$ を満たすため、 $P(x) = 0$ の実数解のうち最大のものは、 $x = 2 + \sqrt{2}$ である。

(3)

円 C は x 軸と直線 $x = -1$ に接し、中心は第1象限にあるから、その中心の座標は、1より大きい実数 r を用いて $(-1 + r, r)$ と表せる。よって、円 C の式は $(x + 1 - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$ となるから、これが点 $(5, 3)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} (5 + 1 - r)^2 + (3 - r)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow (r - 3)(r - 15) &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= 3, 15 \quad (\because r > 1) \end{aligned}$$

より、 $r = 3$ または15である。以下、 $r = 3$ で考える。中心が $(2, 3)$ 、半径が3の円 C 上にある点 P の座標は、 $P(3\cos\theta + 2, 3\sin\theta + 3)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)とおける。このとき

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= (3\cos\theta + 3, 3\sin\theta + 3) \\ \overline{AB} &= (1, -1) \end{aligned}$$

であることから、三角形 ABP の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |(3\sin\theta + 3) \cdot 1 - (3\cos\theta + 3) \cdot (-1)| \\ &= \frac{3}{2} |2 + \sin\theta + \cos\theta| \\ &= \frac{3}{2} \left| 2 + \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right| \\ &= \frac{3}{2} \left\{ 2 + \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積の最小値は $\theta = \frac{5}{4}\pi$ ($\because 0 \leq \theta < 2\pi$)のときで、

$$\frac{3}{2} \{ 2 + \sqrt{2} \cdot (-1) \} = \frac{3(2 - \sqrt{2})}{2}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
$2\cos\theta$	2	$2-2\cos\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{1}{2}(4-t)\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}$
カ	キ	ク	ケ	コ
$1-\sqrt{3}$	$\frac{2-t}{2}$	$\sqrt{5-2t}$	$\frac{2-t}{4-t}$	$\frac{2}{4-t}$

〔解説〕

問題文の条件より、

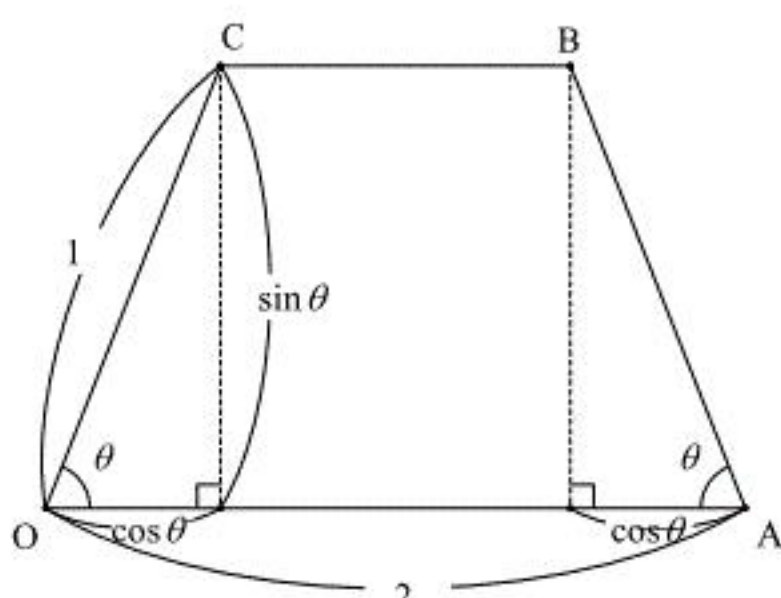
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \cos \angle AOC$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \cos \theta$$

と表せる。 $0 < \theta < \pi$ より、 $|\cos \theta| < 1 \Leftrightarrow |t| < 2$ である。以下、辺 CB の長さを求めるにあたって、 θ の値に応じて場合分けを行う。

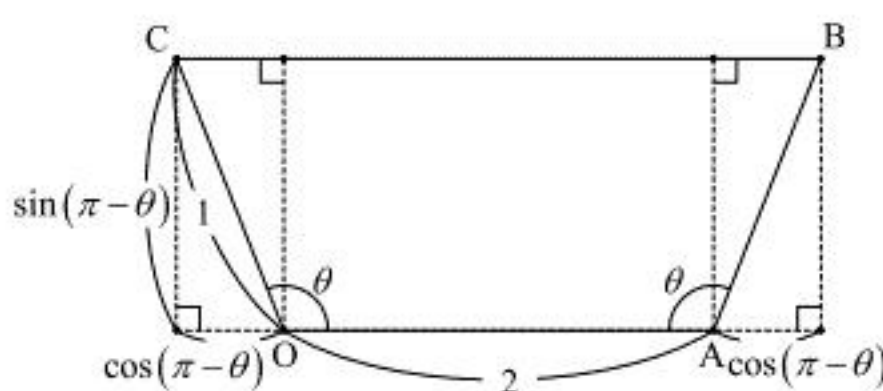
[1] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

台形 OABC は下図のようになり、上底 CB の長さは $2-2\cos\theta$ 、台形 OABC の高さは $\sin\theta$ と表せる。



[2] $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ のとき

台形 OABC は下図のようになり、上底 CB の長さは $2+2\cos(\pi-\theta)=2-2\cos\theta$ 、台形 OABC の高さは $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ と表せる。



以上、[1], [2]より、上底 CB の長さは $2-2\cos\theta$ 、台形 OABC の高さは

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ ($\because 0 < \theta < \pi$) と表せる。したがって、台形 OABC の面積を S とおくと、

$$S = \frac{1}{2} \{2 + (2 - 2\cos\theta)\} \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2} (4 - t) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} (4 - t) \sqrt{1 - \frac{1}{4}t^2}$$

と表せる。ここで、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(4-t)^2 \left(1 - \frac{1}{4}t^2\right)} \quad (\because |t| < 2)$$

であるから、 S は $(4-t)^2 \left(1 - \frac{1}{4}t^2\right)$ が最大値をとるときに最大となる。 $f(t) = (4-t)^2 \left(1 - \frac{1}{4}t^2\right)$ とすると、

$$f'(t) = -2(4-t) \left(1 - \frac{1}{4}t^2\right) - \frac{1}{2}t(4-t)^2$$

$$= (4-t)(t^2 - 2t - 2)$$

となる。したがって、 $|t| < 2$ の範囲で $f(t)$ の増減表を書くと、下図のようになる。

t	(-2)	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	(2)
$f'(t)$	$\nearrow$	$+$	0	$-$	$\searrow$
$f(t)$	$\nearrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\searrow$

増減表より、 S が最大値をとる t の値は、 $f(t)$ が最大値をとる $t = 1 - \sqrt{3}$ となる。次に、線分

OA と線分 CB は平行であるから、 $\overrightarrow{CB} = \frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{OA}|} \overrightarrow{OA} = \frac{2-t}{2} \overrightarrow{OA}$ と表せる。したがって、

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \frac{2-t}{2} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

となり、このとき、

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{\left(\frac{2-t}{2}\right)^2 |\overrightarrow{OA}|^2 + 2 \cdot \frac{2-t}{2} \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2} \quad (\because |\overrightarrow{OB}| > 0)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2-t}{2}\right)^2 \cdot 2^2 + 2 \cdot \frac{2-t}{2} \cdot t + 1^2}$$

$$= \sqrt{5-2t}$$

である。点 P は線分 AC 上にあるから、実数 s を用いて、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OC}$ とおける。さ

らに、点 P は線分 OB 上にあるから、実数 k を用いて $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OB} = \frac{k(2-t)}{2} \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC}$ とおけ

る。 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから、係数を比較して、

$$\begin{cases} s = \frac{k(2-t)}{2} \\ 1-s = k \end{cases}$$

$$\therefore k = \frac{2}{4-t}, s = \frac{2-t}{4-t} \quad (\because |t| < 2)$$

となる。したがって、 $\overrightarrow{OP} = \frac{2-t}{4-t} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{4-t} \overrightarrow{OC}$ である。

〔3〕

〔解答〕

(1)	ア	イ		
	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{9}$		
(2)	ウ	エ		
	$\frac{125}{216}$	$\frac{19}{27}$		
(3)	オ	カ	キ	ク
	3	18	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{216}$
(4)	ケ	コ		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{108}$		

〔解説〕

(1) 3個のさいころを投げたとき、目の出方は 6^3 通りあり、いずれも同様に確からしい。
 $x=y=z$ となるのは、3個のさいころの出る目が同じになるときであり、そのような目の出方は $(x, y, z)=(1, 1, 1), (2, 2, 2), \dots, (6, 6, 6)$ の6通りある。したがって、求める確率は

$$\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$$

である。また、 x, y, z がすべて異なるような目の出方は、出る3つの目の組み合わせが ${}_6C_3$ 通り、さいころと出る目の組み合わせが $3!$ 通りあるから、求める確率は

$$\frac{{}_6C_3 \cdot 3!}{6^3}=\frac{5}{9}$$

である。

(2) $l=xyz$ が5の倍数とならないのは、3個のさいころのいずれも5の目が出ないときであるから、求める確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$$

である。また、 l が3の倍数となる事象は、3個のさいころのいずれも3または6の目が出ない事象の余事象であるから、求める確率は、

$$1-\left(\frac{4}{6}\right)^3=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

となる。

(3) $m=x+y+z$ のとりうる値の範囲は、 $1 \leq w \leq 6$ ($w=x, y, z$)より、 $3 \leq m \leq 18$ である。 $m=3$ となるのは、 $(x, y, z)=(1, 1, 1)$ のときのみであるから、 $m=3$ となる確率は

$$\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$$

である。また、 $m=18$ となるのは、 $(x, y, z)=(6, 6, 6)$ のときのみであるから、 $m=18$ となる確率は

$$\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$$

である。

(4) $n=100x+10y+z=2(50x+5y)+z$ であり、 $50x+5y$ は整数より、 $2(50x+5y)$ は偶数である。したがって、 n が奇数となるのは z が奇数、すなわち $z=1, 3, 5$ となるときであり、 n が奇数となる確率は

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

となる。また、 $n=100x+10y+z=9(11x+y)+x+y+z$ であり、 $11x+y$ は整数より、 $9(11x+y)$ は9の倍数である。したがって、 n が9の倍数となるのは $x+y+z$ が9の倍数となるときであり、 $3 \leq x+y+z \leq 18$ より、 $x+y+z=9$ または $x+y+z=18$ となるときである。

[1] $x+y+z=9$ のとき

3個のさいころの出る目を小さい順に並べると、全て異なる目が出るとき $(1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4)$ 、2個のさいころで同じ目が出るとき $(1, 4, 4), (2, 2, 5)$ 、3個とも同じ目が出るとき $(3, 3, 3)$ が考えられる。よって、さいころと出る目の組み合わせを考慮すると、 $x+y+z=9$ となるのは $(3 \cdot 3!+2 \cdot 3+1)$ 通りあるから、求める確率は

$$\frac{3 \cdot 3!+2 \cdot 3+1}{6^3}=\frac{25}{216}$$

となる。

[2] $x+y+z=18$ のとき

(3)より、求める確率は $\frac{1}{216}$ となる。

[1], [2]は互いに排反な事象であるから、 n が9の倍数となる確率は、

$$\frac{25}{216}+\frac{1}{216}=\frac{26}{216}=\frac{13}{108}$$

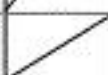
である。

〔4〕

(1)

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -nx^{-n-1} \log x + x^{-n} \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^{-n-1} (1 - n \log x) \end{aligned}$$

であるから、 $f_n(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^n}$	$\cdots$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$
$f_n(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より、 $f_n(x)$ は $x=e^{\frac{1}{n}}$ で最大値をとるから、 $a_n=e^{\frac{1}{n}}$ である。さらに $f_n(x)$ の最大値は

$$f_n\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{-n} \log e^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{ne}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n=e^{\frac{1}{n}}, \quad f_n(x) \text{ の最大値 } \frac{1}{ne}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{-n} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty \text{ より,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x^{-n} \log x = -\infty$$

である。また、 $x=e^t$ とおくと、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-n} \log x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{nt}}$ が成り立つ。これを求めるた

めに、まずは任意の正の実数 t について、 $e^t > \frac{t^2}{2}$ であることを示す。 $f(t)=e^t - \frac{t^2}{2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^t - t \\ f''(t) &= e^t - 1 \end{aligned}$$

である。 $t > 0$ において $f''(t) > 0$ であるから、 $f'(t)$ は $t > 0$ において単調増加関数である。このことと $f'(0)=1$ より、 $t > 0$ において $f'(t) > 0$ となる。したがって、 $f(t)$ は $t > 0$ において単調増加関数である。さらにこのことと $f(0)=1$ より、 $t > 0$ において $f(t) > 0$ となる。これより $e^t > \frac{t^2}{2}$ が示せた。したがって、

$$0 \leq \frac{t}{e^{nt}} \leq \frac{t}{e^t} < \frac{t}{\frac{t^2}{2}} = \frac{2}{t}$$

が成り立ち、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{t} = 0$ であるから、はさみうちの原理より $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{nt}} = 0$ となる。以上より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow +0} f_n(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

(3)

C を積分定数として、

$$\begin{aligned} \int f_n(x) dx &= \int x^{-n} \log x dx \\ &= \frac{1}{1-n} x^{1-n} \log x - \int \frac{1}{1-n} x^{1-n} (\log x)' dx \\ &= \frac{1}{1-n} x^{1-n} \log x - \int \frac{1}{1-n} x^{-n} dx \\ &= \frac{1}{1-n} x^{1-n} \log x - \frac{1}{(1-n)^2} x^{1-n} + C \\ &= \frac{1}{1-n} x^{1-n} \left(\log x - \frac{1}{1-n} \right) + C \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^{e^n} f_n(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{1-n} x^{1-n} \left(\log x - \frac{1}{1-n} \right) \right]_1^{e^n} \\ &= \left\{ \frac{1}{1-n} \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^{1-n} \left(\log e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{1-n} \right) \right\} - \left\{ \frac{1}{1-n} \left(\log 1 - \frac{1}{1-n} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{(1-n)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{n} - 2 \right) e^{\frac{1}{n-1}} \right\} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \int f_n(x) dx = \frac{1}{1-n} x^{1-n} \left(\log x - \frac{1}{1-n} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$I_n = \frac{1}{(1-n)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{n} - 2 \right) e^{\frac{1}{n-1}} \right\}$$

(4)

(3)の結果を利用して、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 I_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(1-n)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{n} - 2 \right) e^{\frac{1}{n-1}} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n} - 1 \right)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \cdot e^{\frac{1}{n-1}} \right\} \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 I_n = 1 - \frac{2}{e}$$