

【1】

【解答】

ア	10π
---	---------

イ	$3+\sqrt{3}$
---	--------------

ウ	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$
---	------------------------

エ	$\frac{\sqrt{10}(3+\sqrt{3})}{10}$
---	------------------------------------

オ	3
---	---

カ	$\frac{7}{6}$
---	---------------

キ	$\frac{23}{18}$
---	-----------------

ク	1
---	---

ケ	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$
---	-----------------------

コ	$\frac{3\sqrt{2}}{8}$
---	-----------------------

【解説】

(1)

△ABCにおいて正弦定理より、外接円の半径 R は

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BC}{\sin \angle A} \\ \Leftrightarrow 2R &= \frac{\sqrt{10}}{\frac{1}{2}} \\ \therefore R &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

である。したがって、外接円の面積は $\pi R^2 = 10\pi$ となる。また、△ABCにおいて、余弦定理より、

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A \\ \Leftrightarrow 10 &= AB^2 + 4 - 2AB \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow AB^2 - 2\sqrt{3}AB - 6 &= 0 \\ \therefore AB &= 3 + \sqrt{3} \quad (\because AB > 0) \end{aligned}$$

である。このことから、△ABCの面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A &= \frac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{3}) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。また、△ABCの面積を底辺がBC、高さがAHであるとみなして求め、①と比較すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot AH &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ \therefore AH &= \frac{\sqrt{10}(3 + \sqrt{3})}{10} \end{aligned}$$

を得る。このとき、 $0^\circ < \angle BAH < 90^\circ$ であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} \cos \angle BAH &= \frac{AH}{AB} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{10}(3 + \sqrt{3})}{10}}{3 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \tan \angle BAH &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \angle BAH} - 1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{10}}\right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{10 - 1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。

(2)

変量 x, y の平均値 $\bar{x}, \bar{y}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{6}(c + c + a + d + c + d) \\ &= \frac{1}{6}(a + 3c + 2d) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{9}{6}d + 3 \cdot \frac{7}{6}d + 2d\right) \\ &= \frac{7}{6}d \\ \bar{y} &= \frac{1}{6}(d + b + a + c + b + b) \\ &= \frac{1}{6}(a + 3b + c + d) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{9}{6}d + 3 \cdot \frac{8}{6}d + \frac{7}{6}d + d\right) \\ &= \frac{23}{18}d \end{aligned}$$

と求まる。また、変量 x, y の分散 s_x^2, s_y^2 はそれぞれ

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{6}\left\{\left(c - \frac{7}{6}d\right)^2 + \left(c - \frac{7}{6}d\right)^2 + \left(a - \frac{7}{6}d\right)^2 + \left(d - \frac{7}{6}d\right)^2 + \left(c - \frac{7}{6}d\right)^2 + \left(d - \frac{7}{6}d\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{7}{6}d - \frac{7}{6}d\right)^2 + \left(\frac{7}{6}d - \frac{7}{6}d\right)^2 + \left(\frac{9}{6}d - \frac{7}{6}d\right)^2 + \left(d - \frac{7}{6}d\right)^2 + \left(\frac{7}{6}d - \frac{7}{6}d\right)^2 + \left(d - \frac{7}{6}d\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left(0 + 0 + \frac{1}{9}d^2 + \frac{1}{36}d^2 + 0 + \frac{1}{36}d^2\right) \\ &= \frac{1}{36}d^2 \\ s_y^2 &= \frac{1}{6}\left\{\left(d - \frac{23}{18}d\right)^2 + \left(b - \frac{23}{18}d\right)^2 + \left(a - \frac{23}{18}d\right)^2 + \left(c - \frac{23}{18}d\right)^2 + \left(b - \frac{23}{18}d\right)^2 + \left(b - \frac{23}{18}d\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left\{\left(d - \frac{23}{18}d\right)^2 + \left(\frac{8}{6}d - \frac{23}{18}d\right)^2 + \left(\frac{9}{6}d - \frac{23}{18}d\right)^2 + \left(\frac{7}{6}d - \frac{23}{18}d\right)^2 + \left(\frac{8}{6}d - \frac{23}{18}d\right)^2 + \left(\frac{8}{6}d - \frac{23}{18}d\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left\{\left(-\frac{5}{18}d\right)^2 + \left(\frac{1}{18}d\right)^2 + \left(\frac{4}{18}d\right)^2 + \left(-\frac{2}{18}d\right)^2 + \left(\frac{1}{18}d\right)^2 + \left(\frac{1}{18}d\right)^2\right\} \\ &= \frac{2}{81}d^2 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $d > 0$ より、変量 x, y の標準偏差 s_x, s_y はそれぞれ $s_x = \frac{d}{6}, s_y = \frac{\sqrt{2}}{9}d$ である。

また、 $x' = \frac{6}{d}x - 6, y' = \frac{6}{d}y - 6$ とおくとき、変量 x', y' の標準偏差 $s_{x'}, s_{y'}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} s_{x'} &= \frac{6}{d}s_x, s_{y'} = \frac{6}{d}s_y \text{ と表せるから,} \\ s_{x'} &= \frac{6}{d}s_x \\ &= \frac{6}{d} \cdot \frac{d}{6} \\ &= 1 \\ s_{y'} &= \frac{6}{d}s_y \\ &= \frac{6}{d} \cdot \frac{\sqrt{2}}{9}d \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。さらに、変量 x と変量 y の共分散 s_{xy} は

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{6}\left\{\left(c - \frac{7}{6}d\right)\left(d - \frac{23}{18}d\right) + \left(c - \frac{7}{6}d\right)\left(b - \frac{23}{18}d\right) + \left(a - \frac{7}{6}d\right)\left(a - \frac{23}{18}d\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(d - \frac{7}{6}d\right)\left(c - \frac{23}{18}d\right) + \left(c - \frac{7}{6}d\right)\left(b - \frac{23}{18}d\right) + \left(d - \frac{7}{6}d\right)\left(b - \frac{23}{18}d\right)\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{7}{6}d - \frac{7}{6}d\right)\left(d - \frac{23}{18}d\right) + \left(\frac{7}{6}d - \frac{7}{6}d\right)\left(\frac{8}{6}d - \frac{23}{18}d\right) + \left(\frac{9}{6}d - \frac{7}{6}d\right)\left(\frac{9}{6}d - \frac{23}{18}d\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(d - \frac{7}{6}d\right)\left(\frac{7}{6}d - \frac{23}{18}d\right) + \left(\frac{7}{6}d - \frac{7}{6}d\right)\left(\frac{8}{6}d - \frac{23}{18}d\right) + \left(d - \frac{7}{6}d\right)\left(\frac{8}{6}d - \frac{23}{18}d\right)\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left\{0 + 0 + \frac{1}{3}d \cdot \frac{2}{9}d + \left(-\frac{1}{6}d\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}d\right) + 0 + \left(-\frac{1}{6}d\right) \cdot \frac{1}{18}d\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{27}d^2 + \frac{1}{54}d^2 - \frac{1}{108}d^2\right) \\ &= \frac{1}{72}d^2 \end{aligned}$$

と求まるから、変量 x と変量 y の相関係数 r は

$$\begin{aligned} r &= \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \\ &= \frac{\frac{1}{72}d^2}{\frac{d}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{9}d} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

である。

【2】

【解答】

ア	$y = -t^2 + 2at + 4$	イ	5	ウ	$a^2 + 4$
エ	$10a - 21$	オ	3	カ	$\frac{4}{3}$
キ	$\frac{2}{3}$	ク	2	ケ	$5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 2$
コ	$15 \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1 \right\} - 2n$				

【解説】

(1)

$$y = (\log_2 4x) \left(\log_2 \frac{4}{x} \right) + a \log_4 x^4 \quad (1 \leq x \leq 32) \quad \dots \textcircled{1}$$

を $t = \log_2 x$ の式で表すと、

$$\begin{aligned} y &= (\log_2 4x) \left(\log_2 \frac{4}{x} \right) + a \log_4 x^4 \\ &= (2 + \log_2 x)(2 - \log_2 x) + a \cdot \frac{\log_2 x^4}{\log_2 4} \\ &= (2 + t)(2 - t) + a \cdot \frac{4t}{2} \\ &= -t^2 + 2at + 4 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①で、 $1 \leq x \leq 32$ のとき、 $t = \log_2 x$ の取り得る値の範囲は

$$\begin{aligned} 1 &\leq x \leq 32 \\ \Leftrightarrow \log_2 2^0 &\leq \log_2 x \leq \log_2 2^5 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq t \leq 5 \end{aligned}$$

である。また、②を変形すると $y = -(t-a)^2 + a^2 + 4$ となり、 ty 平面上で軸が $t = a$ で上に凸な放物線であるから、 $0 \leq t \leq 5$ における①の最大値 M を軸の位置で場合分けをして考える。

[1] $0 < a \leq 5$ のとき

$$\begin{aligned} t &= a \text{ で最大値をとるから、} \\ M &= -(a-a)^2 + a^2 + 4 \\ &= a^2 + 4 \end{aligned}$$

である。

[2] $a > 5$ のとき

$$\begin{aligned} t &= 5 \text{ で最大値をとるから、} \\ M &= -(5-a)^2 + a^2 + 4 \\ &= 10a - 21 \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、 $0 < a \leq 5$ のとき $M = a^2 + 4$ 、 $a > 5$ のとき $M = 10a - 21$ である。 a の取り得る値に注意すると、 $0 < a \leq 5$ のとき $0 < a^2 + 4 \leq 29$ 、 $a > 5$ のとき $29 < 10a - 21$ であるから、 $M = 13$ となるような定数 a の値は

$$\begin{aligned} a^2 + 4 &= 13 \\ \therefore a &= 3 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。

(2)

$a_n = 0$ となる n が存在するとすると、 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 4}$ より、 $a_{n-1} = 0$ となり、これを繰り返すと

$a_1 = 0$ となり矛盾が生じる。したがって、すべての n について $a_n \neq 0$ であるから、

$a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 4}$ の両辺の逆数をとると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{2a_n + 4}{3a_n} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{4}{3}b_n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{4}{3}b_n + \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + 2 &= \frac{4}{3}(b_n + 2) \end{aligned}$$

と変形できる。数列 $\{b_n + 2\}$ は初項 $b_1 + 2 = \frac{1}{a_1} + 2 = 5$ 、公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} b_n + 2 &= 5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \\ \therefore b_n &= 5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 2 \end{aligned}$$

が数列 $\{b_n\}$ の一般項であり、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \frac{1}{5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 2}$ である。また、数列 $\{b_n\}$ の

初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ 5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} - 2 \right\} \\ &= 5 \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{4}{3} - 1} - 2n \\ &= 15 \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1 \right\} - 2n \end{aligned}$$

となる。

[3]

(1)

$-1 \leq a \leq 1, 0 \leq a+1 \leq 2$ であるから、 $-1 \leq x \leq 2$ での $x^3 - 4x$ の符号を考えると、

$$x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$$

と因数分解できることに注意すれば、

$$-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき } x^3 - 4x \geq 0$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{ のとき } x^3 - 4x \leq 0$$

である。ここで、 $0 \leq a \leq 1$ のとき、 $1 \leq a+1 \leq 2$ であるから、 $a \leq x \leq a+1$ において

$$x^3 - 4x \leq 0 \text{ となり、}$$

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} |x^3 - 4x| dx \\ &= -\int_a^{a+1} (x^3 - 4x) dx \\ &= -\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_a^{a+1} \\ &= -\left\{ \frac{(a+1)^4 - a^4}{4} \right\} + 2\{(a+1)^2 - a^2\} \\ &= -\frac{4a^3 + 6a^2 + 4a + 1}{4} + 2(2a + 1) \\ &= -a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 3a + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = -a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 3a + \frac{7}{4}$$

(2)

$-1 \leq a \leq 0$ のとき、 $0 \leq a+1 \leq 1$ であるから、 $a \leq x \leq 0$ において $x^3 - 4x \geq 0$ 、 $0 \leq x \leq a+1$

において $x^3 - 4x \leq 0$ となり、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} |x^3 - 4x| dx \\ &= \int_a^0 (x^3 - 4x) dx - \int_0^{a+1} (x^3 - 4x) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_a^0 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^{a+1} \\ &= -\left(\frac{a^4}{4} - 2a^2 \right) - \left\{ \frac{(a+1)^4}{4} - 2(a+1)^2 \right\} \\ &= -\frac{a^4}{4} + 2a^2 - \frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1}{4} + 2a^2 + 4a + 2 \\ &= -\frac{1}{2}a^4 - a^3 + \frac{5}{2}a^2 + 3a + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = -\frac{1}{2}a^4 - a^3 + \frac{5}{2}a^2 + 3a + \frac{7}{4}$$

(3)

$0 \leq a \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} S'(a) &= -3a^2 - 3a + 3 \\ &= -3(a^2 + a - 1) \end{aligned}$$

である。 $S'(a) = 0$ の $0 \leq a \leq 1$ における解は $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ であり、 $0 \leq a < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$S'(a) > 0$ 、 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < a \leq 1$ のとき $S'(a) < 0$ となる。また、 $-1 \leq a \leq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} S'(a) &= -2a^3 - 3a^2 + 5a + 3 \\ &= -(2a+1)(a^2 + a - 3) \end{aligned}$$

である。 $S'(a) = 0$ の $-1 \leq a \leq 0$ における解は $a = -\frac{1}{2}$ であり、 $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$ のとき $S'(a) < 0$ 、

$-\frac{1}{2} < a \leq 0$ のとき $S'(a) > 0$ となる。したがって、 $-1 \leq a \leq 1$ での $S(a)$ の増減表は下表となる。

a	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$S(a)$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\frac{9}{4}$

このとき、

$$\begin{aligned} S\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{4} \\ &= -\frac{1}{32} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \\ &= \frac{31}{32} < \frac{9}{4} \end{aligned}$$

より、 $a = -\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{31}{32}$ をとる。また、

$$\begin{aligned} S(a) &= -a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 3a + \frac{7}{4} \\ &= \frac{-4a^3 - 6a^2 + 12a + 7}{4} \\ &= \frac{(a^2 + a - 1)(-4a - 2) + 10a + 5}{4} \end{aligned}$$

であり、 $a^2 + a - 1 = 0$ の解の1つが $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} S\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{0 + 10 \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 5}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{4} > \frac{7}{4} \end{aligned}$$

より、 $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で最大値 $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{31}{32}, \quad a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{5\sqrt{5}}{4}$$