

【1】

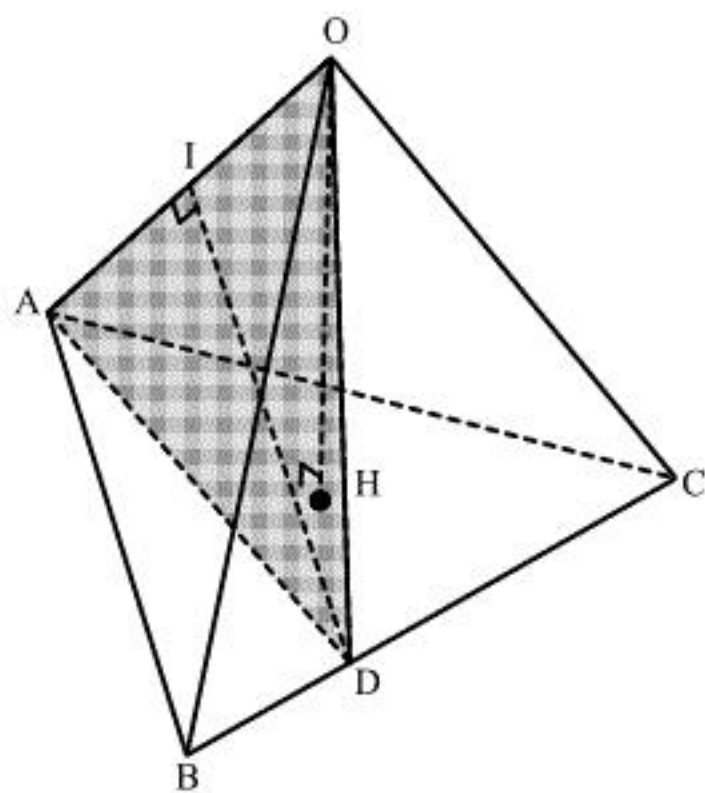
〔解答〕

ア	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	イ	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	ウ	$\frac{4\sqrt{2}}{9}$
エ	$\frac{2\sqrt{7}}{3}$	オ	$\frac{\sqrt{19}}{3}$	カ	$\frac{2}{5}$
キ	$\frac{7}{50}$	ク	$\frac{19}{200}$	ケ	$\frac{8}{19}$
コ	$\frac{6}{19}$				

〔解説〕

(1)

正四面体 OABC と各点を図示すると下図となる。



OA=OB=OC=2であるから、点Oから△ABCに下ろした垂線と△ABCの交点Hは、△ABCの外心と一致する。したがって、△ABCについて正弦定理より、

$$2AH = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\therefore AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

である。このとき、直角三角形 OAH について三平方の定理より、

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2}$$

$$= \sqrt{4 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

となる。また、正四面体 OADC の体積は

$$\frac{1}{2} \cdot CA \cdot CD \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot OH \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

である。△ACDについて余弦定理より、

$$AD^2 = CA^2 + CD^2 - 2 \cdot CA \cdot CD \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 4 + \frac{16}{9} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{28}{9}$$

$$\therefore AD = \frac{2\sqrt{7}}{3} (\because AD > 0)$$

となる。ここで、△ACDと△OCDについて、CDが共通、AC=OC、∠ACD=∠OCDである

から、△ACDと△OCDは合同であり、AD=OD= $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ となる。したがって、△OADは

AD=OD= $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ 、OA=2の二等辺三角形である。点DからOAに下した垂線とOAの交点をI

とすると、三平方の定理より

$$DI = \sqrt{AD^2 - AI^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{19}}{3}$$

である。以上より、△OADの面積は

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot DI = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{19}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{19}}{3}$$

となる。

(2)

取り出された製品が工場Cで生産されたものでなかった確率は

$$\frac{2000+3000}{10000} = \frac{1}{2}$$

である。また、取り出された製品が工場Aで生産されたものであった確率は

$$\frac{2000}{10000} = \frac{1}{5}$$

である。したがって、取り出された製品が工場Cで生産されたものでなかったとき、工場Aで生産されたものである条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

となる。また、取り出された製品が工場C以外で発生した不良品である確率は

$$\frac{2000 \cdot \frac{20}{100} + 3000 \cdot \frac{10}{100}}{10000} = \frac{7}{100}$$

である。したがって、取り出された製品が工場Cで生産されたものでなかったとき、不良品である条件付き確率は

$$\frac{\frac{7}{100}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{50}$$

となる。さらに、取り出された製品が不良品である確率は

$$\frac{2000 \cdot \frac{20}{100} + 3000 \cdot \frac{10}{100} + 5000 \cdot \frac{5}{100}}{10000} = \frac{19}{200}$$

である。工場A,Bの不良品が取り出される確率は、それぞれ

$$\frac{2000 \cdot \frac{20}{100}}{10000} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{3000 \cdot \frac{10}{100}}{10000} = \frac{3}{100}$$

である。したがって、取り出された製品が不良品であったとき、工場A,Bで生産されたものである条件付き確率は、それぞれ

$$\frac{\frac{1}{25}}{\frac{19}{200}} = \frac{8}{19}$$

$$\frac{\frac{3}{100}}{\frac{19}{200}} = \frac{6}{19}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

ア	$y = t^2 - 3t - 2$	イ	$3\sqrt{3}$	ウ	$-\frac{17}{4}$
エ	$\frac{1}{27}$	オ	16	カ	$-\frac{3}{2}$
キ	$\sqrt{3}$	ク	$\sqrt{7}$	ケ	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
コ	$\frac{\sqrt{21}}{14}$				

〔解説〕

(1)

関数

$$y = (\log_3 x)^2 - \log_{\sqrt{3}} x^2 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{9}{x} \quad \left(\frac{1}{27} \leq x \leq 27 \right) \quad \cdots \text{①}$$

について、 $t = \log_3 x$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} y &= (\log_3 x)^2 - \log_{\sqrt{3}} x^2 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{9}{x} \\ &= (\log_3 x)^2 - \frac{\log_3 x^2}{\log_3 \sqrt{3}} + \frac{\log_3 \frac{9}{x}}{\log_3 \frac{1}{3}} \\ &= (\log_3 x)^2 - \frac{2 \log_3 x}{\frac{1}{2}} + \frac{2 - \log_3 x}{-1} \\ &= t^2 - 4t - 2 + t \\ &= t^2 - 3t - 2 \quad \cdots \text{②} \end{aligned}$$

となる。①で、 $\frac{1}{27} \leq x \leq 27$ のとき、 $t = \log_3 x$ の取り得る値の範囲は

$$\begin{aligned} \frac{1}{27} &\leq x \leq 27 \\ \Leftrightarrow \log_3 3^{-3} &\leq \log_3 x \leq \log_3 3^3 \\ \Leftrightarrow -3 &\leq t \leq 3 \end{aligned}$$

である。また、②を変形すると $y = \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{17}{4}$ となるから、 $-3 \leq t \leq 3$ において、関数①は

$t = \frac{3}{2}$ のとき最小値 $-\frac{17}{4}$ をとり、 $t = -3$ のとき最大値 16 をとる。ここで、

$$\begin{aligned} t = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \log_3 x = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 3\sqrt{3} \\ t = -3 &\Leftrightarrow \log_3 x = -3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

であるから、関数①は $x = 3\sqrt{3}$ のとき最小値 $-\frac{17}{4}$ をとり、 $x = \frac{1}{27}$ のとき最大値 16 をとる。

(2)

$|\overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OB}}| = 1$ 、 $|2\overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OB}}| = 1$ の各辺を 2 乗し、 $|\overrightarrow{\text{OA}}| = 1$ を用いて整理すると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{OA}}|^2 + 2\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} + |\overrightarrow{\text{OB}}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} + |\overrightarrow{\text{OB}}|^2 &= 0 \\ 4|\overrightarrow{\text{OA}}|^2 + 4\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} + |\overrightarrow{\text{OB}}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} + |\overrightarrow{\text{OB}}|^2 &= -3 \end{aligned}$$

となる。これらを連立して解くと、 $\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} = -\frac{3}{2}$ 、 $|\overrightarrow{\text{OB}}| = \sqrt{3}$ とわかる。このとき、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{AB}}|^2 &= |\overrightarrow{\text{OB}} - \overrightarrow{\text{OA}}|^2 \\ &= |\overrightarrow{\text{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} + |\overrightarrow{\text{OA}}|^2 \\ &= 3 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) + 1 \\ &= 7 \\ |\overrightarrow{\text{AB}}| &= \sqrt{7} \quad (\because |\overrightarrow{\text{AB}}| \geq 0) \end{aligned}$$

である。また、 $\triangle \text{OAB}$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{(|\overrightarrow{\text{OA}}| \cdot |\overrightarrow{\text{OB}}|)^2 - (\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{3 - \left(-\frac{3}{2} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

であり、O から辺 AB に下した垂線の長さを h とすると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{\text{AB}}| \cdot h &= \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot h &= \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \therefore h &= \frac{\sqrt{21}}{14} \end{aligned}$$

となる。

〔3〕

(1)

平面上の放物線 C は $y = x^2$ を平行移動して得られる放物線であるから、ある定数 a, b を用い

て $y = (x-a)^2 + b$ と書ける。 $y' = 2(x-a)$ について、 $x = t$ で $y' = t$ であるから、

$$2(t-a) = t$$

$$\therefore a = \frac{t}{2}$$

と表せる。また、 $y = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + b$ は点 $\left(t, \frac{t^2}{2} + 1\right)$ を通るから

$$\frac{t^2}{2} + 1 = \left(t - \frac{t}{2}\right)^2 + b$$

$$\therefore b = \frac{t^2}{4} + 1$$

と表せる。したがって、放物線 C の方程式は t を用いて $y = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} + 1$ と表せる。

$$(\text{答}) \quad y = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} + 1$$

(2)

放物線 $C: y = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} + 1$ と放物線 $y = 3(x-1)^2$ を連立すると、

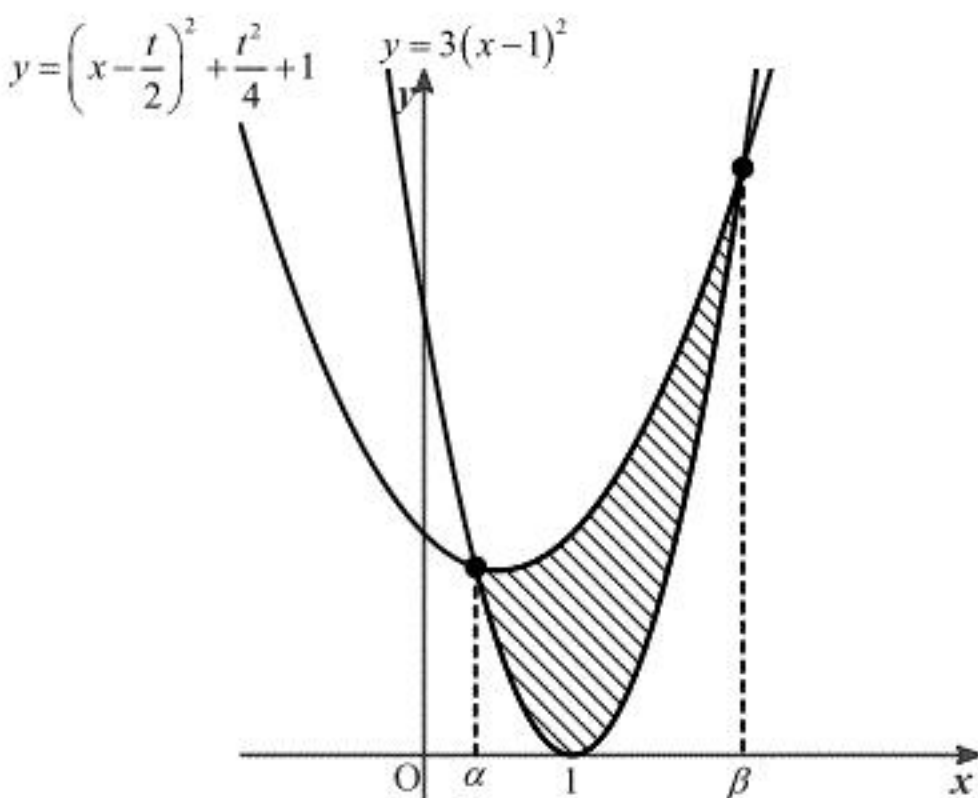
$$\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} + 1 = 3(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (t-6)x + 2 - \frac{t^2}{2} = 0$$

$$\therefore x = \frac{6-t \pm \sqrt{5t^2 - 12t + 20}}{4} \left(\because 5t^2 - 12t + 20 = 5\left(t - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{64}{5} > 0 \right)$$

と解ける。このとき、 $\alpha = \frac{6-t - \sqrt{5t^2 - 12t + 20}}{4}$, $\beta = \frac{6-t + \sqrt{5t^2 - 12t + 20}}{4}$ とおく。放物線 C と

放物線 $y = 3(x-1)^2$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ は下図の斜線部の面積であるから、



$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} + 1 - 3(x-1)^2 \right\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ 2x^2 + (t-6)x + 2 - \frac{t^2}{2} \right\} dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{6-t + \sqrt{5t^2 - 12t + 20}}{4} - \frac{6-t - \sqrt{5t^2 - 12t + 20}}{4} \right)^3 \\ &= \frac{1}{24} (5t^2 - 12t + 20)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S(t) = \frac{1}{24} (5t^2 - 12t + 20)^{\frac{3}{2}}$$

(3)

$S(t) = \frac{1}{24} (5t^2 - 12t + 20)^{\frac{3}{2}}$ が最小となるような t の値と、 $f(t) = 5t^2 - 12t + 20$ が最小となるよう

な t の値は一致するから、 $f(t)$ が最小となるような t の値を求めればよい。

$$f(t) = 5t^2 - 12t + 20$$

$$= 5\left(t - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{64}{5}$$

であるから、 $t = \frac{6}{5}$ のときに $f(t)$ は最小値をとる。したがって、 $S(t) = \frac{1}{24} (5t^2 - 12t + 20)^{\frac{3}{2}}$ の最

小値は

$$\begin{aligned} S\left(\frac{6}{5}\right) &= \frac{1}{24} \left(\frac{64}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{64\sqrt{5}}{75} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{64\sqrt{5}}{75}$$