

[1]

[解答]

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	5	$2\sqrt{2}$	1	4	8
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{6}{25}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{23}{25}$

[解説]

(1)

$y = x^2 + bx + 2b - 6$ と $y = x + 1$ のグラフの交点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} x^2 + bx + 2b - 6 &= x + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + (b-1)x + 2b - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1-b \pm \sqrt{b^2 - 10b + 29}}{2} \end{aligned}$$

と計算できる。よって交点の座標は $\left(\frac{1-b \pm \sqrt{b^2 - 10b + 29}}{2}, \frac{3-b \pm \sqrt{b^2 - 10b + 29}}{2} \right)$ となる。線分

PQ の長さを ℓ とおくと、

$$\begin{aligned} \ell^2 &= \left(\frac{\sqrt{b^2 - 10b + 29}}{2} - \frac{-\sqrt{b^2 - 10b + 29}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b^2 - 10b + 29}}{2} - \frac{-\sqrt{b^2 - 10b + 29}}{2} \right)^2 \\ &= 2(b^2 - 10b + 29) \\ &= 2(b-5)^2 + 8 \end{aligned}$$

となる。したがって ℓ は $b=5$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる。また、 $y = x^2 + bx + 2b - 6$ のグラフを x 軸方向に 1、 y 軸方向に p だけ平行移動したグラフの式は、

$$\begin{aligned} y &= (x-1)^2 + b(x-1) + 2b - 6 + p \\ &= x^2 + (b-2)x + b + p - 5 \end{aligned}$$

となる。これが $y = ax^2 + 2ax + a + 6$ のグラフと重なるから、係数比較して、

$$\begin{cases} 1 = a \\ b - 2 = 2a \\ b + p - 5 = a + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ p = 8 \end{cases}$$

と a, b, p の値がわかる。

(2)

カードの取り出され方を (X, Y) と表す。 $Y \leq 2 < X$ をみたす (X, Y) は、

$$(X, Y) = (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)$$

の 6 通りである。よって求める確率は $\frac{6}{5^2} = \frac{6}{25}$ となる。 $5 \leq X + Y \leq 8$ となるのは

$X + Y = 5, 6, 7, 8$ のときで、これをみたす (X, Y) はそれぞれ 4, 5, 4, 3 通りである。よって求め

る確率は $\frac{4+5+4+3}{5^2} = \frac{16}{25}$ となる。 $XY \geq 8$ となるのは

$$(X, Y) = (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)$$

の 13 通りである。よって求める確率は $\frac{13}{5^2} = \frac{13}{25}$ となる。 $X \geq 2Y$ となるのは

$$(X, Y) = (2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2) \text{ の 6 通りである。よって求める確率は } \frac{6}{5^2} = \frac{6}{25}$$

となる。最後に $XY - 4X - Y^2 + 6Y \leq 8$ となる (X, Y) について調べる。 $Y = 4$ のとき不等式の左辺の値が 8 となることに注目すると、題意の不等式は、

$$\begin{aligned} XY - 4X - Y^2 + 6Y - 8 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (Y-4)(Y-X-2) &\geq 0 \end{aligned}$$

と因数分解できる。よって、この不等式の解は $X \geq 2$ のとき $Y \leq 4$ または $Y \geq X+2$ 、 $X=1$ のとき $Y \leq 3$ または $Y \geq 4$ となる。これをみたさない (X, Y) は $(X, Y) = (4, 5), (5, 5)$ のみであ

るから、求める確率は $\frac{5^2-2}{5^2} = \frac{23}{25}$ となる。

【2】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$-a-2$	$3b+1$	$\frac{a+3b+3}{5}x+\frac{-3a+6b-4}{5}$	-2	$-\frac{1}{3}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$-(\overline{GA}+\overline{GB})$	$\sqrt{7}$	$-\frac{2\sqrt{7}}{7}$	$2\sqrt{7}$

【解説】

(1)
整式 $P(x)$ を x^2+3x+2 で割った商を $f(x)$ とすると、余りが $x-a$ であることから

$$\begin{aligned}P(x) &= f(x)(x^2+3x+2)+x-a \\ &= f(x)(x+1)(x+2)+x-a\end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$ を $P(x)$ に代入すると、

$$P(-2)=-a-2 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

である。よって、これが整式 $P(x)$ を $x+2$ で割った余りである。一方、整式 $P(x)$ を x^2-6x+9 で割った商を $g(x)$ とすると、余りが $bx+1$ であることから

$$\begin{aligned}P(x) &= g(x)(x^2-6x+9)+bx+1 \\ &= g(x)(x-3)^2+bx+1\end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $x-3=0\Leftrightarrow x=3$ を $P(x)$ に代入すると、

$$P(3)=3b+1 \qquad \cdots \textcircled{2}$$

である。よって、これが整式 $P(x)$ を $x-3$ で割った余りである。同様に、整式 $P(x)$ を x^2-x-6 で割った商を $h(x)$ とし、余りを $cx+d$ とすれば、

$$\begin{aligned}P(x) &= h(x)(x^2-x-6)+cx+d \\ &= h(x)(x+2)(x-3)+cx+d\end{aligned}$$

と表せる。これを①、②へ代入すると

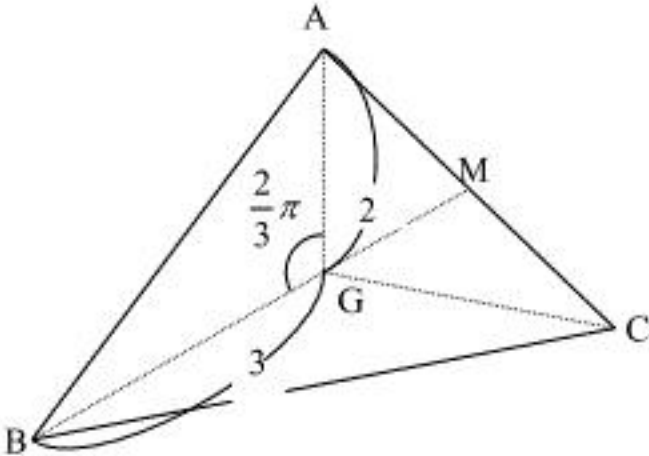
$$\begin{cases}-2c+d=-a-2 \\ 3c+d=3b+1\end{cases}$$

と連立できる。これを解くと $c=\frac{a+3b+3}{5}$ 、 $d=\frac{-3a+6b-4}{5}$ であるから、整式 $P(x)$ を x^2-x-6

で割った余りは $\frac{a+3b+3}{5}x+\frac{-3a+6b-4}{5}$ である。更に、整式 $P(x)$ を x^2-x-6 で割った余りが

0のとき、 $\frac{a+3b+3}{5}=\frac{-3a+6b-4}{5}=0$ が成り立つため、これを解いて $a=-2$ 、 $b=-\frac{1}{3}$ である。

(2)



上図のように直線 BG と線分 CA の交点を M とすると、点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから、

$$AM:MC=1:1, BG:GM=2:1 \qquad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。よって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= 2 \triangle AMB \\ &= 3 \triangle AGB \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である。一方、

$$\begin{aligned}\overline{CG} &= \frac{2}{3} \left(\frac{\overline{CA} + \overline{CB}}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \overline{CG} &= \frac{1}{3} (\overline{GA} + \overline{GB} - 2\overline{GC}) \\ \therefore \overline{GC} &= -(\overline{GA} + \overline{GB})\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\overline{GC}|^2 &= |\overline{GA}|^2 + 2 \cdot \overline{GA} \cdot \overline{GB} + |\overline{GB}|^2 \\ &= 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 9 \\ &= 7\end{aligned}$$

を得る。よって、 $GC=\sqrt{7}$ である。ここで、 $\cos \angle BGC$ について、

$$\begin{aligned}\overline{GB} \cdot \overline{GC} &= 3\sqrt{7} \cos \angle BGC \\ \Leftrightarrow \cos \angle BGC &= \frac{1}{3\sqrt{7}} \overline{GB} \cdot \overline{GC}\end{aligned}$$

が成り立つ。一方、

$$\begin{aligned}\overline{GB} \cdot \overline{GC} &= -\overline{GB} \cdot (\overline{GA} + \overline{GB}) \\ &= -2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - 9 \\ &= -6\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\cos \angle BGC &= \frac{\overline{GB} \cdot \overline{GC}}{|\overline{GB}| \cdot |\overline{GC}|} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{7}} \cdot (-6) \\ &= -\frac{2\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

とわかる。したがって、 $\triangle BGC$ について余弦定理より

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{GB^2 + GC^2 - 2 \cdot GB \cdot GC \cos \angle BGC} \\ &= \sqrt{9 + 7 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{7}}{7} \right)} \\ &= 2\sqrt{7}\end{aligned}$$

である。

[3]

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

であるから、増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

(答) 前表

(2)

$a > 0$ より $x < 0$ のとき

$$a^2 x < 0 \leq |f(x)|$$

となるから、直線 $y = a^2 x$ と曲線 $y = |f(x)|$ は $x < 0$ において共有点を持たない。 $f(0) = 0$ であるから、増減表を考えて、 $x \geq 0$ において $f(x) \geq 0$ となる。よって、 $x \geq 0$ において $y = a^2 x$ と $y = f(x)$ が 3 つの異なる共有点を持つ条件を求めればよい。ここで

$$\begin{aligned} a^2 x &= f(x) \\ \Leftrightarrow a^2 x &= x^3 - 6x^2 + 9x \\ \Leftrightarrow x(x-3-a)(x-3+a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 3-a, 3+a \end{aligned}$$

となるから、これらが全て $x \geq 0$ で、異なる解である条件を求める。 $0, 3+a$ は $a > 0$ より、ともに $x \geq 0$ を満たし、

$$\begin{aligned} 3-a &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a &\leq 3 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

となる。①のもとで $3-a \neq 0, 3-a \neq 3+a, 3+a \neq 0$ であるから

$$a \neq \pm 3, 0 \quad \cdots \text{②}$$

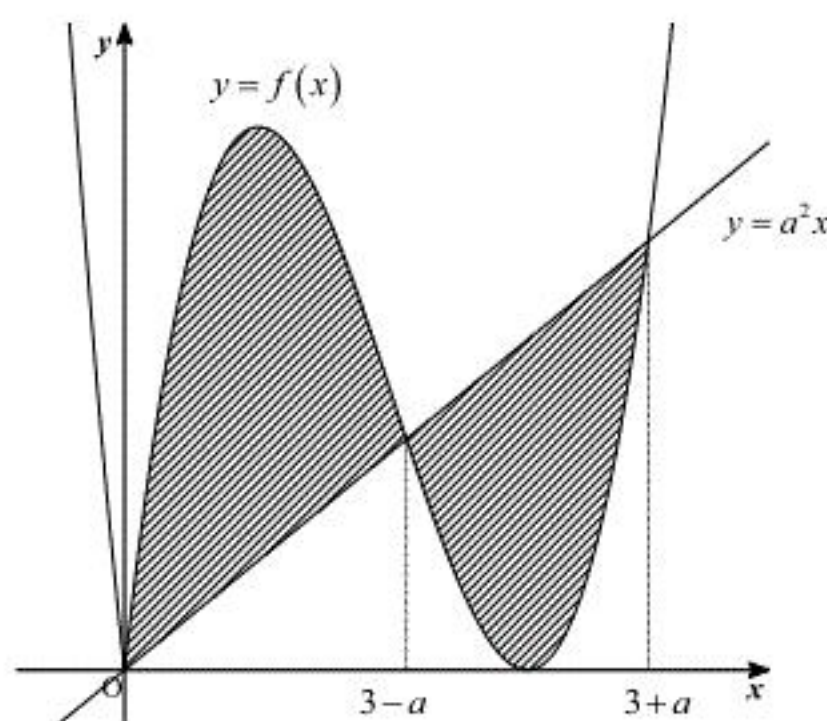
となるので、①、②、 $a > 0$ より a の取りうる範囲は

$$0 < a < 3$$

となる。

(答) $0 < a < 3$

(3)



上図斜線部の領域の面積を求めればよいから

$$S(a) = \int_0^{3-a} x\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} dx - \int_{3-a}^{3+a} x\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} dx$$

となる。まず

$$\begin{aligned} \int_0^{3-a} x\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} dx &= \int_0^{3-a} \{x^3 - 6x^2 + (9-a^2)x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9-a^2}{2}x^2 \right]_0^{3-a} \\ &= \frac{(3-a)^4}{4} - 2(3-a)^3 + \frac{(3-a)^3(3+a)}{2} \\ &= \frac{(3-a)^3}{4} \{(3-a) - 8 + 2(3+a)\} \\ &= \frac{(a+1)(3-a)^3}{4} \\ &= -\frac{a^4}{4} + 2a^3 - \frac{9}{2}a^2 + \frac{27}{4} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} &x\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} \\ &= \{x-(3-a) + (3-a)\}\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} \\ &= \{x-(3-a)\}^2 \{x-(3+a)\} + (3-a)\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} \\ &= \{x-(3-a)\}^2 \{x-(3-a) + (3-a) - (3+a)\} + (3-a)\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} \\ &= \{x-(3-a)\}^3 - 2a\{x-(3-a)\}^2 + (3-a)\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} &\int_{3-a}^{3+a} x\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} dx \\ &= \int_{3-a}^{3+a} \{x-(3-a)\}^3 dx - 2a \int_{3-a}^{3+a} \{x-(3-a)\}^2 dx + (3-a) \int_{3-a}^{3+a} \{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}\{x-(3-a)\}^4 \right]_{3-a}^{3+a} - 2a \left[\frac{1}{3}\{x-(3-a)\}^3 \right]_{3-a}^{3+a} - \frac{3-a}{6} \{(3+a) - (3-a)\}^3 \\ &= \frac{(2a)^4}{4} - \frac{2a(2a)^3}{3} - \frac{4a^3(3-a)}{3} \\ &= 4a^4 - \frac{16}{3}a^4 + \frac{4}{3}a^4 - 4a^3 \\ &= -4a^3 \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{3-a} x\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} dx - \int_{3-a}^{3+a} x\{x-(3-a)\}\{x-(3+a)\} dx \\ &= -\frac{a^4}{4} + 6a^3 - \frac{9}{2}a^2 + \frac{27}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S(a) = -\frac{a^4}{4} + 6a^3 - \frac{9}{2}a^2 + \frac{27}{4}$