

〔1〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	$\frac{p^2}{4}-2q$	-8	-2	
(2)	エ	オ	カ	
	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{13}{27}$	
(3)	キ	ク	ケ	コ
	$2\sin x\cos x$	$3\sin x-4\sin^3 x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$

〔解説〕

(1)

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{p}{2} \\ \alpha\beta=q \end{cases} \quad \dots\dots ①$$

となるので

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2-2q \\ &= \frac{p^2}{4}-2q \end{aligned}$$

となる。また、二次方程式 $x^2+qx+p=0$ について解と係数の関係より

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-q \quad \dots\dots ②$$

$$(\alpha+\beta)\alpha\beta=p \quad \dots\dots ③$$

となる。①、②より

$$-\frac{p}{2}+q=-q \Leftrightarrow p=4q \quad \dots\dots ④$$

となる。①、③より

$$q\left(-\frac{p}{2}\right)=p \Leftrightarrow q=-2 \left(\because p\neq 0\right)$$

となり、④より

$$p=4q=-8$$

となる。

(2)

1人が勝つのは、3人が同じ手を出し、残り1人がそれに勝つ手を出す場合である。勝つ人の選び方は4通り、手の組み合わせは3通りあるので、求める確率は

$$\frac{3\times 4}{3^4}=\frac{4}{27}$$

となる。3人が勝つ場合も同様に考えて $\frac{4}{27}$ となる。

2人が勝つのは、2人が同じ手を出し、残り2人がそれに勝つ手を出す場合である。勝つ人の選び方は

$${}_4C_2=6 \text{ (通り)}$$

であり、手の組み合わせは3通りであるので、求める確率は

$$\frac{6\times 3}{3^4}=\frac{2}{9}$$

となる。

あいことなるのは、1～3人が勝つ場合の余事象であるから、確率は

$$1-\left(\frac{4}{27}\times 2+\frac{2}{9}\right)=\frac{13}{27}$$

となる。

(3)

倍角の公式より

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

となり、三倍角の公式より

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

となる。

$0<x<\pi$ のとき $0<\sin x$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin 3x &= 2\sin x \\ \Leftrightarrow 3\sin x-4\sin^3 x &= 2\sin x \\ \Leftrightarrow \sin x(2\sin x-1)(2\sin x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &= \frac{1}{2} \left(\because 0<\sin x\right) \\ \therefore x &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	$\sqrt{5}$	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
(2)	オ	カ	キ	ク
	1	$\frac{7}{6}r$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
(3)	ケ	コ		
	$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, 0\right)$		

〔解説〕

(1)

$\overrightarrow{AB}=(-1, 2, 0)$ であるから、

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

となる。また、 $\overrightarrow{AC}=(-1, 0, 3)$ であるから、

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\cdot(-1)+2\cdot0+0\cdot3=1$$

となる。さらに△ABCの面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}&=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot(1^2+3^2)-1^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{49}\\&=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

となる。ここで、△OABの面積は、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ が垂直であるから、

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$$

である。△OABの外周の長さは、 $|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{OB}|, |\overrightarrow{AB}|$ の和であるから、

$$1+2+\sqrt{5}=3+\sqrt{5}$$

となる。内接円の半径を x とすると、△OABは $|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{OB}|, |\overrightarrow{AB}|$ をそれぞれ底辺とする、高さ

x である3つの三角形の和になるので、その面積は

$$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})x$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})x&=1\\ \Leftrightarrow x&=\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$\overrightarrow{OC}$ は平面OABに垂直であるから、四面体OABCの体積は

$$\frac{1}{3}\cdot1\cdot3=1$$

である。また、四面体OABCの表面積は、

$$\frac{7}{2}+1+\frac{1}{2}\cdot2\cdot3+\frac{1}{2}\cdot1\cdot3=9$$

である。四面体OABCは△OAB, OAC, OBC, ABCのそれぞれを底面として、高さ r の4つの

四面体に分けられるので、その体積は

$$\frac{1}{3}\cdot9\cdot r=3r$$

となる。このうち特に四面体PABCの体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot r=\frac{7}{6}r$$

となる。四面体OABCの体積より、

$$3r=1\Leftrightarrow r=\frac{1}{3}$$

となる。平面OAB, OBC, OCAはそれぞれ垂直に交わるので、点Pの座標は $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ となる。

(3)

求めるベクトルを $\vec{q}=(1, y, z)$ とすると、

$$\begin{aligned}\begin{cases}\vec{q}\cdot\overrightarrow{AB}=-1+2y=0\\ \vec{q}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+3z=0\end{cases}\\\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{2}\\ z=\frac{1}{3}\end{cases}\end{aligned}$$

となる。これより、求めるベクトルは $\vec{q}=\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ となる。点Pを通り、平面ABCに垂直な

直線の方程式は、

$$\begin{aligned}(x, y, z)&=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)+t\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\\&=\left(\frac{1}{3}+t, \frac{1}{3}+\frac{t}{2}, \frac{1}{3}+\frac{t}{3}\right)\end{aligned}$$

である。この直線とxy平面の交点は、直線において z 座標が0になる時である。よって、

$$\frac{1}{3}+\frac{t}{3}=0\Leftrightarrow t=-1$$

となる。この時の座標は

$$\left(\frac{1}{3}-1, \frac{1}{3}-\frac{1}{2}, 0\right)=\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, 0\right)$$

となる。

〔 3 〕

〔解答〕

ア	$e-2$	イ	$\frac{1}{e}$	ウ	$\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}-2$
エ	$e^{x+1}+e^x-2x-3$	オ	$e^{x+1}+e^x-2$	カ	$\log\frac{2}{e+1}$
キ	0	ク	$e-2$	ケ	$\log\frac{2}{e+1}$
コ	$2\log\frac{e+1}{2}-1$				

〔解説〕

$t \geq 0$ のとき $e^t - 1 \geq 0$, $t < 0$ のとき $e^t - 1 < 0$ となるから,

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^1 (e^t - 1) dt \\ &= \left[e^t - t \right]_0^1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= \int_{-1}^0 (1 - e^t) dt \\ &= \left[t - e^t \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 - e^t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} (e^t - 1) dt \\ &= \left[t - e^t \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[e^t - t \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}} - 2 \end{aligned}$$

と計算できる。 $-1 \leq x \leq 0$ のとき, $f(x)$ を x の式で表すと,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^0 (1 - e^t) dt + \int_0^{x+1} (e^t - 1) dt \\ &= \left[t - e^t \right]_x^0 + \left[e^t - t \right]_0^{x+1} \\ &= e^{x+1} + e^x - 2x - 3 \end{aligned}$$

となる。これを x で微分すると, $f'(x) = e^{x+1} + e^x - 2$ と計算でき, $f'(x) = 0$ となる x の値は,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x (e+1) &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \log \frac{2}{e+1} \end{aligned}$$

と計算できる。 $\frac{1}{e} < \frac{2}{e+1} < 1$ より $x = \log \frac{2}{e+1}$ は $-1 < x < 0$ をみたす。よって $f(x)$ の $-1 \leq x \leq 0$

における増減表は以下の通りとなる。

x	-1	...	$\log \frac{2}{e+1}$	...	0
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$e-2$

$e-2 > \frac{1}{e}$ かつ増減表より, $f(x)$ は $x=0$ のとき最大値 $e-2$ をとり, $x = \log \frac{2}{e+1}$ のとき最小値

$$f\left(\log \frac{2}{e+1}\right) = 2\log \frac{e+1}{2} - 1 \text{ をとる。}$$

〔4〕

(1)

数列 $\{a_n\}$ は以下の漸化式で定義される。

$$\begin{cases} a_1 = c & \cdots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = 4a_n + p^n + 9 \ (n \geq 1) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

数列 $\{b_n\}$ は $b_n = \frac{a_n}{4^{n-1}} \ (n \geq 1)$ で定義されるから、②の両辺を 4^n で割って整理することで

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{4^n} &= \frac{a_n}{4^{n-1}} + \left(\frac{p}{4}\right)^n + \frac{9}{4^n} \Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + \left(\frac{p}{4}\right)^n + \frac{9}{4^n} \\ \therefore b_{n+1} - b_n &= \left(\frac{p}{4}\right)^n + \frac{9}{4^n} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} - b_n = \left(\frac{p}{4}\right)^n + \frac{9}{4^n}$$

(2)

$c = -2, p = 4$ のとき、(1)の結果より

$$b_{n+1} - b_n = \frac{9}{4^n} + 1 \ (n \geq 1)$$

となるから、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) + b_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{9}{4^k}\right) + b_1 \\ &= (n-1) + \frac{\frac{9}{4} - \frac{9}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{(-2)}{4^0} \\ &= n - \frac{3}{4^{n-1}} \end{aligned}$$

と求まり、これは $n=1$ でも成立する。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 4^{n-1} \left(n - \frac{3}{4^{n-1}} \right) \\ &= n \cdot 4^{n-1} - 3 \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad a_n = n \cdot 4^{n-1} - 3$$

(3)

$p = 3$ のとき、(2)と同様にして、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^k + \frac{9}{4^k} \right\} + b_1 \\ &= \frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} + \frac{\frac{9}{4} - \frac{9}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{c}{4^0} \\ &= c + 6 - \frac{3^n}{4^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}} \end{aligned}$$

と求まり、これは $n=1$ でも成立する。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 4^{n-1} \left(c + 6 - \frac{3^n}{4^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}} \right) \\ &= \frac{c+6}{4} \cdot 4^n - 3^n - 3 \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{c+6}{4} \cdot 4^n - 3^n - 3$$

(4)

$p = 3$ のとき、(3)の結果より、数列 $\left\{ \frac{a_n}{3^{n-1}} \right\}$ の一般項は

$$\frac{a_n}{3^{n-1}} = \frac{3}{4} (c+6) \left(\frac{4}{3}\right)^n - 3 - \frac{9}{3^n}$$

であり、極限值について

$$\begin{cases} c+6 > 0 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} (c+6) \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty \\ c+6 = 0 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} (c+6) \left(\frac{4}{3}\right)^n = 0 \\ c+6 < 0 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} (c+6) \left(\frac{4}{3}\right)^n = -\infty \end{cases}$$

となるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{3^n} = 0$ と合わせて、数列 $\left\{ \frac{a_n}{3^{n-1}} \right\}$ が収束するための条件は

$$c+6=0 \Leftrightarrow c=-6$$

であることがわかる。また、このときの極限值は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} = 0 - 3 + 0 = -3$$

である。

$$(\text{答}) \quad c \text{ の値: } c = -6, \text{ 極限值: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} = -3$$