

〔1〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	-3	$-\frac{1}{3}$	5	-2	$-\frac{5}{2}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{91}{216}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{3}$

〔解説〕

(1)

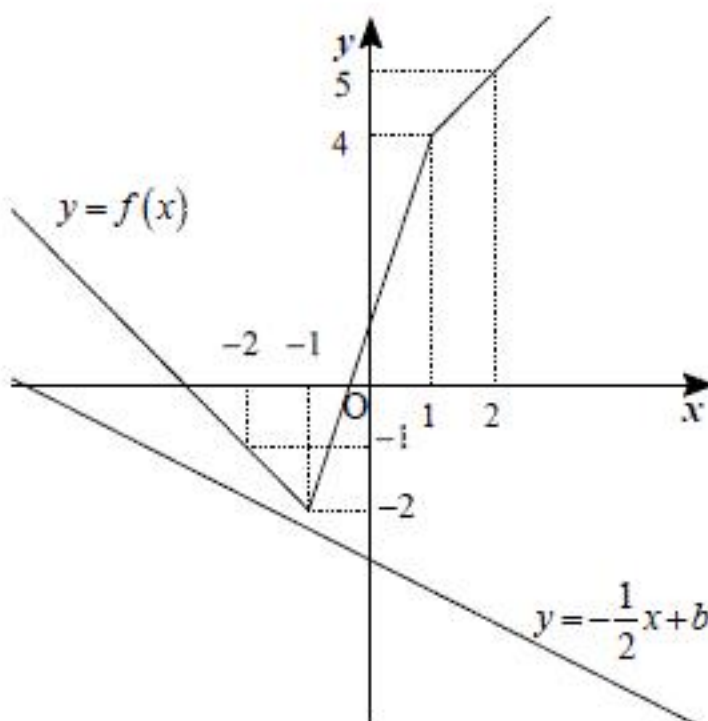
関数 $f(x) = 2|x+1| - |1-x|$ は、

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & (x \leq -1) \\ 3x+1 & (-1 \leq x \leq 1) \\ x+3 & (1 \leq x) \end{cases}$$

と表せる。よって、 $f(x) = 0$ のとき、これを解いて $x = -3, -\frac{1}{3}$ である。また、

$$f(-2) = -1, f(-1) = -2, f(1) = 4, f(2) = 5$$

であるから、 $-2 \leq x \leq 2$ における関数 $f(x)$ の最大値は 5、最小値は -2 である。



また、関数 $y = f(x)$ と直線 $y = -\frac{1}{2}x + b$ は上図のように描けるから、すべての実数 x について

$f(x) \geq -\frac{1}{2}x + b$ が成り立つとき、

$$f(-1) \geq -\frac{1}{2} \cdot (-1) + b$$

$$\Leftrightarrow -2 \geq b + \frac{1}{2}$$

$$\therefore b \leq -\frac{5}{2}$$

である。

(2)

X が奇数となるには、3つの目がすべて奇数であればよい。よって求める確率は

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{6^3} = \frac{1}{8} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 X が素数となるには、2つの目が1、残りの目が2, 3, 5であればよい。よって求める確率は

$$\frac{{}_3C_1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{6^3} = \frac{1}{24}$$

である。 X が5の倍数でないとき、3つの目がすべて5以外であればよい。よって求める確率はこの余事象であるから、

$$1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。更に X が25の倍数であるとき、2つ以上の目が5であればよい。2つの目が5、残りの目が1, 2, 3, 4, 6の場合と3つの目が5の場合が考えられる。求める確率は、

$$\frac{{}_3C_1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1}{6^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{6^3} = \frac{2}{27}$$

である。また、 X が10の倍数であるとき、3つの目には偶数の目を含み、かつ5の目を含む。ここで、3つの目に偶数を含む確率は①より

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。偶数の目と5の目のどちらも含まれない確率は3つの目が1, 3の場合であるから、

$$\frac{2^3}{6^3} = \frac{1}{27} \quad \dots \textcircled{4}$$

である。②、③、④より、求める確率は

$$\frac{7}{8} + \frac{91}{216} + \frac{1}{27} - 1 = \frac{1}{3}$$

である。

〔2〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ		
(1)	(0, 3, 3)	$3c-13$	$2-c$	$\frac{41}{11}$	$\sqrt{\frac{222}{11}}$		
	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
(2)	0	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$4x^3+3x^2$	7	$\frac{9-6\sqrt{3}}{4}$

〔解説〕

(1)

$\overrightarrow{OA}=(1, 2, -1)$, $\overrightarrow{OB}=\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 5\right)$ であり、点 C は線分 AB を 2:1 で内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}=(0, 3, 3)$$

となる。よって、点 C の座標は (0, 3, 3) である。また、 $\overrightarrow{OD}=(a, b, c)$ であり、内積 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ の値は内積 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ の値の 2 倍であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} &= 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \\ \Leftrightarrow 3b+3c &= 6 \\ \therefore b &= 2-c\end{aligned}$$

を得る。さらに、 $\overrightarrow{CD}$ が $\overrightarrow{CA}$ に垂直であることから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a, b-3, c-3) \cdot (1, -1, -4) &= 0 \\ \Leftrightarrow a=b+4c-15 \\ \therefore a &= 3c-13 \quad (\because b=2-c)\end{aligned}$$

を得る。以上より、 a, b を c を用いて表すと、

$$\begin{cases} a=3c-13 \\ b=2-c \end{cases}$$

となる。よって、OD の長さは c を用いて、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OD}| &= \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ &= \sqrt{(3c-13)^2+(2-c)^2+c^2} \\ &= \sqrt{11c^2-82c+173} \\ &= \sqrt{11\left(c-\frac{41}{11}\right)^2+\frac{222}{11}}\end{aligned}$$

と表されるため、OD の長さが最小となるのは $c=\frac{41}{11}$ のときであり、その最小値は $\sqrt{\frac{222}{11}}$ となる。

(2)

与えられた不等式 $-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\leq 1$ を同値変形すると、

$$\begin{aligned}-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 2\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right) &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right) &\leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。よって、 $0\leq\theta<2\pi$ かつ $-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\leq 1$ を満たす θ のとり得る値の範囲は、 $\frac{5}{6}\pi\leq\theta+\frac{5}{6}\pi\leq\frac{17}{6}\pi$ の下で $\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)\leq\frac{1}{2}$ を満たす θ のとり得る値の範囲と同値である。

これより、求める θ の範囲は

$$\begin{aligned}\frac{5}{6}\pi\leq\theta+\frac{5}{6}\pi\leq\frac{13}{6}\pi \\ \therefore 0\leq\theta\leq\frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

となる。次に、

$$y=2\sin\theta-2\sin\theta\cos 2\theta-3\cos^2\theta+3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の $0\leq\theta\leq\frac{4}{3}\pi$ における最大値と最小値を求める。まず、 $x=\sin\theta$ をおくと、 $0\leq\theta\leq\frac{4}{3}\pi$ より、 x のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq x\leq 1$$

である。また、①式は x を用いて

$$\begin{aligned}y &= 2\sin\theta-2\sin\theta\cos 2\theta-3\cos^2\theta+3 \\ &= 2\sin\theta-2\sin\theta(1-2\sin^2\theta)-3(1-\sin^2\theta)+3 \\ &= 2x-2x+4x^3-3+3x^2+3 \\ &= 4x^3+3x^2\end{aligned}$$

と表される。よって、 y の x に関する導関数は

$$\begin{aligned}y' &= 12x^2+6x \\ &= 12x\left(x+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

であるから、 $y'=0$ となるのは、 $x=-\frac{1}{2}, 0$ のときである。以上より、 y の $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq x\leq 1$ における増減表は以下ようになる。

x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	$-\frac{1}{2}$	...	0	...	1
y'		+	0	-	0	+	
y	$\frac{9-6\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	7

上表より、①式における y の最大値は 7、最小値は $\frac{9-6\sqrt{3}}{4}$ であることがわかる。

[3]

(1)

3次関数 $f(x)$ は $x=-2$ と $x=1$ において極値をとるから、導関数 $f'(x)$ について、2次方程式 $f'(x)=0$ は $x=-2, 1$ を解にもつことがわかる。したがって、実数 $a(\neq 0), b$ を定数として

$$f'(x) = a(x+2)(x-1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(x) dx + b \\ &= \int_0^x a(x+2)(x-1) dx + b \\ &= \int_0^x a(x^2 + x - 2) dx + b \\ &= \frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - 2ax + b \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 $y=f(x)$ のグラフは点 $A(-3, 0), B(0, -9)$ を通ることから

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(-3) = 0 \\ f(0) = -9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -9a + \frac{9}{2}a + 6a + b = 0 \\ b = -9 \end{cases} \\ \therefore (a, b) &= (6, -9) \quad (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

となるため、求める関数 $f(x)$ は $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$$

(2)

曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向に1、 y 軸方向に11だけ平行移動して得られる曲線の式は

$$\begin{aligned} y-11 &= f(x-1) \Leftrightarrow y = 2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 12(x-1) - 9 + 11 \\ &\Leftrightarrow y = 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 3(x^2 - 2x + 1) - 12(x-1) + 2 \\ &\Leftrightarrow y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15 \end{aligned}$$

であるから、求める関数 $g(x)$ は $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$$

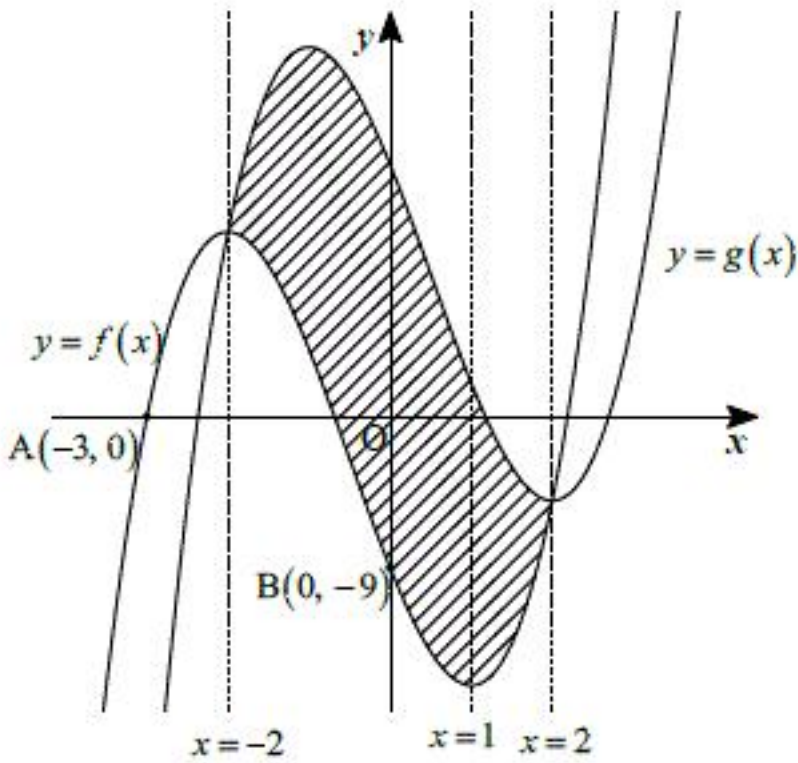
(3)

2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の上下関係について、 $f(x)-g(x)$ を積の形に変形すると

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (2x^3 + 3x^2 - 12x - 9) - (2x^3 - 3x^2 - 12x + 15) \\ &= 6x^2 - 24 \\ &= 6(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

となることから、以下の表のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f(x) - g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
上下関係	$f(x)$ が上	交わる	$g(x)$ が上	交わる	$f(x)$ が上



したがって、2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれる図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \{g(x) - f(x)\} dx &= \int_{-2}^2 -6(x+2)(x-2) dx \\ &= \frac{6}{6} \{2 - (-2)\}^3 \\ &= 64 \end{aligned}$$

と求まる。