

【1】

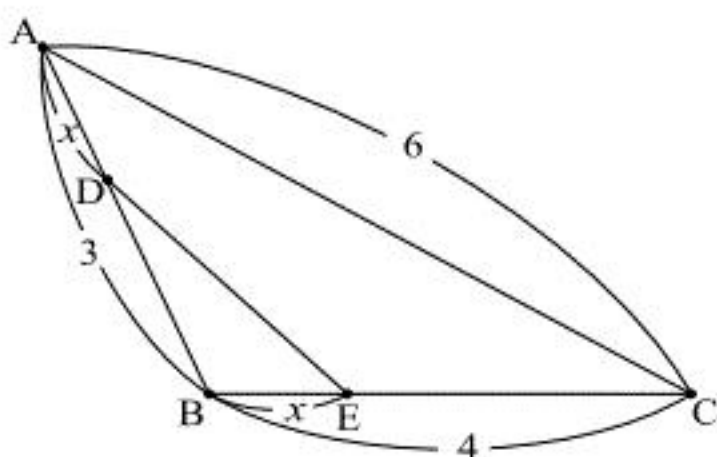
【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$-\frac{11}{24}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{105}}{4}$	$\frac{3\sqrt{455}}{64}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	69	70	139	237	5

【解説】

(1)

問題文の状況を図示すると下図のようになる。



△ABCについて、余弦定理より、

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{11}{24}$$

となる。また、ACとDEが平行となるとき、 $\angle BDE = \angle BAC$ 、 $\angle B$ は共通であるから、 $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ である。したがって、

$$\begin{aligned} BD : BE &= BA : BC \\ \Leftrightarrow (3-x) : x &= 3 : 4 \\ \Leftrightarrow 3x &= 4(3-x) \\ \therefore x &= \frac{12}{7} \end{aligned}$$

である。また、 $DE > 0$ より、 DE^2 が最小値をとるときにDEも最小となる。△DBEに余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} DE^2 &= DB^2 + BE^2 - 2DB \cdot BE \cdot \cos\angle ABC \\ &= (3-x)^2 + x^2 - 2x(3-x) \cdot \left(-\frac{11}{24}\right) \\ &= \frac{13}{12}x^2 - \frac{13}{4}x + 9 \\ &= \frac{13}{12} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{105}{16} \end{aligned}$$

となるから、 DE^2 の長さが最小となるのは $x = \frac{3}{2}$ のときであり、よってDEは $x = \frac{3}{2}$ のとき最

小となり、このとき $DE = \sqrt{\frac{105}{16}} = \frac{\sqrt{105}}{4}$ である。また、

$$\begin{aligned} \sin\angle DBE &= \sin\angle ABC \\ &= \sqrt{1 - \cos^2\angle ABC} \quad (\because 0 < \angle ABC < \pi) \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{11}{24}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{455}}{24} \end{aligned}$$

であるから、 $DE = \frac{\sqrt{105}}{4}$ のときの△BDEの面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} BE \cdot BD \cdot \sin\angle DBE &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(3 - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{455}}{24} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{455}}{24} \\ &= \frac{3\sqrt{455}}{64} \end{aligned}$$

である。

(2)

$n-3$ が13で割り切れる最小の n は107、最大の n は991であるから、このような n の個数は、

$$\frac{991-107}{13} + 1 = 69$$

より、69個ある。同様に、 $n+3$ が13で割り切れる最小の n は101、最大の n は998であるから、このような n の個数は、

$$\frac{998-101}{13} + 1 = 70$$

より、70個ある。また、 $n-3$ が13で割り切れるような n と $n+3$ が13で割り切れるような n が一致することはないから、 $n^2-9=(n-3)(n+3)$ が13で割り切れるような n の個数は、

$$69+70=139$$

より、139個ある。また、 $n-3$ が13で割り切れ、かつ $n+3$ が12で割り切れるとき、 k, l を整数として $n-3=13k, n+3=12l$ とおき、辺々引くと

$$\begin{aligned} (n-3)-(n+3) &= 13k-12l \\ \Leftrightarrow 6(2l-1) &= 13k \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。6, 13は互いに素であるから、整数 m を用いて $2l-1=13m$ とおける。ここで、左辺は奇数より、右辺も奇数となるから、 m は奇数である。このとき、 $\textcircled{1}$ より、

$$2l = 13m + 1, k = 6m$$

と表せる。これらを $n-3=13k, n+3=12l$ に代入し、辺々足すと

$$\begin{aligned} (n-3)+(n+3) &= 13 \cdot 6m + 6(13m+1) \\ \Leftrightarrow 2n &= 13 \cdot 6 \cdot 2m + 6 \\ \Leftrightarrow n &= 78m + 3 \end{aligned}$$

となる。 m は奇数より、これを満たす最小の n は $m=3$ のとき $n=237$ である。同様に、最大の n は $m=11$ のとき $n=861$ である。したがって、このような n の個数は

$$\frac{861-237}{78 \cdot 2} + 1 = 5$$

より、5個ある。

【2】

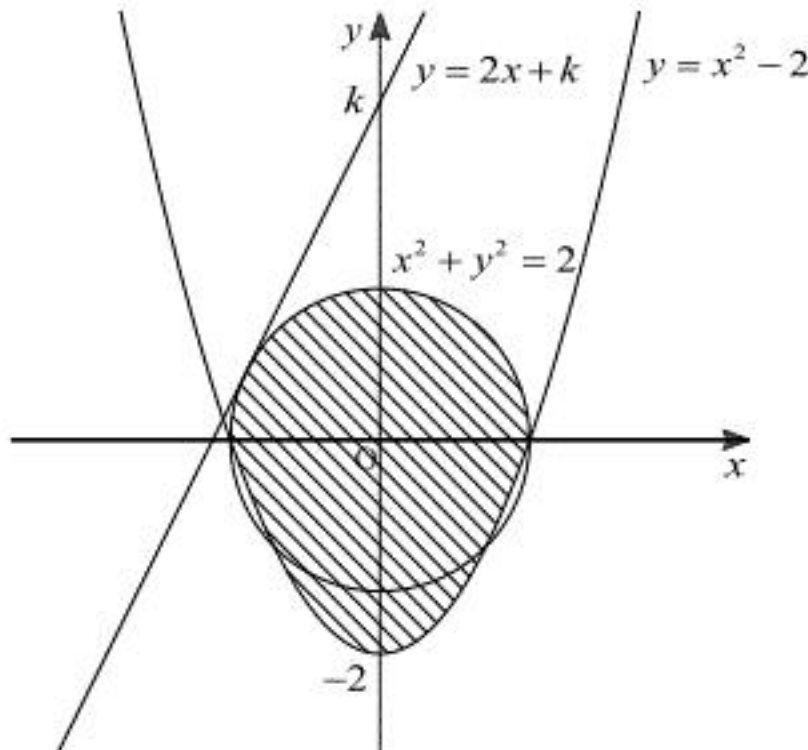
【解答】

(1)	☐ ア	☐ イ	☐ ウ	☐ エ	☐ オ
	$\sqrt{10}$	-1	$4-2\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}+4$
(2)	☐ カ	☐ キ	☐ ク	☐ ケ	☐ コ
	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{6}$	$a_n = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{2}{5}$	10

【解説】

(1)

領域 D は下図の斜線部分である。 $y-2x=k$ とおくと、 $y-2x$ が最大となるのは、領域 D と共有点を持つ直線 $y=2x+k$ の切片 k が最大となるときであるから、下図のように円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=2x+k$ が $y \geq 0$ で接すればよい。



円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=2x+k$ が接するとき、2次方程式

$x^2+(2x+k)^2=2 \Leftrightarrow 5x^2+4kx+k^2-2=0$ の判別式の値は0 となるから、

$$\begin{aligned}(2k)^2-5(k^2-2)&=0 \\ \Leftrightarrow k^2&=10 \\ \therefore k&=\pm\sqrt{10}\end{aligned}$$

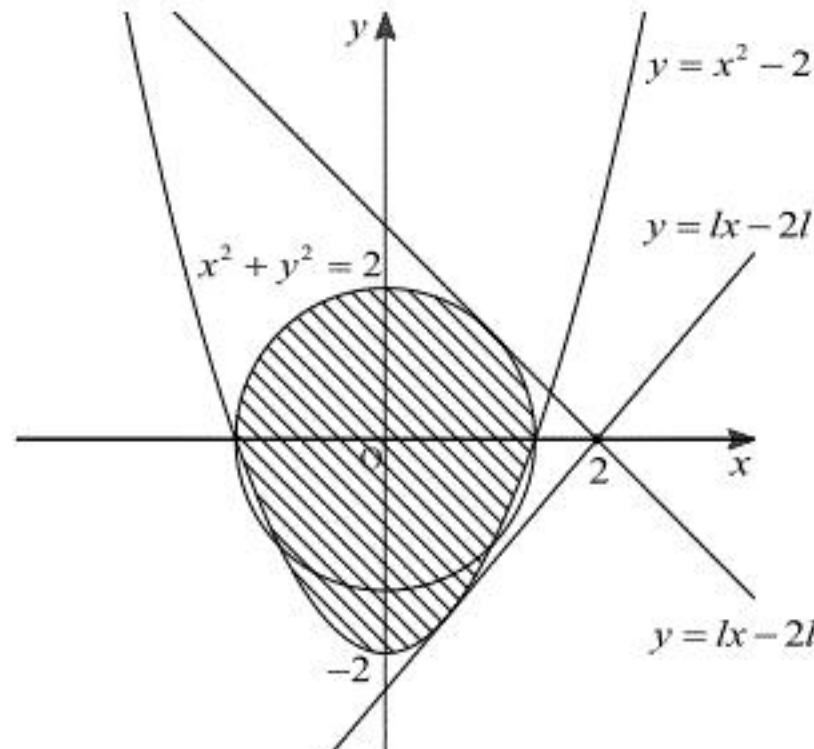
となる。 $k=\sqrt{10}$ のとき、

$$\begin{aligned}5x^2+4kx+k^2-2&=0 \\ \Leftrightarrow 5x^2+4\sqrt{10}x+8&=0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{5}x+2\sqrt{2})^2&=0 \\ \therefore x&=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{10}}{5}, y=\frac{\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

となり、確かに円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=2x+k$ は $y \geq 0$ で接する。したがって、

$k=y-2x$ の最大値は、 $k=\sqrt{10}$ である。 $\frac{y}{x-2}=l$ とおくと、 $\frac{y}{x-2}$ が最小となるのは、領域 D と共有点を持つ直線 $y=lx-2l$ の傾き l が最小となるときである。直線 $y=lx-2l$ は l の値に関わらず点 $(2, 0)$ を通るから、下図のように円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=lx-2l$ が

$y \geq 0$ で接すればよい。また、 $\frac{y}{x-2}$ が最大となるのは、直線 $y=lx-2l$ の傾き l が最大となるときであるから、下図のように放物線 $y=x^2-2$ と直線 $y=lx-2l$ が $y \leq 0$ で接すればよい。



円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=lx-2l$ が接するとき、2次方程式

$x^2+(lx-2l)^2=2 \Leftrightarrow (l^2+1)x^2-4l^2x+(4l^2-2)=0$ の判別式の値は0 となるから、

$$\begin{aligned}(2l^2)^2-(4l^2-2)(l^2+1)&=0 \\ \Leftrightarrow 4l^4-4l^4+2l^2-2&=0 \\ \Leftrightarrow 2l^2&=2 \\ \therefore l&=\pm 1\end{aligned}$$

となる。 $l=-1$ のとき、

$$\begin{aligned}(l^2+1)x^2-4l^2x+(4l^2-2)&=0 \\ \Leftrightarrow 2x^2-4x+2&=0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2&=0 \\ \therefore x&=1, y=1\end{aligned}$$

となり、確かに円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=lx-2l$ は $y \geq 0$ で接する。したがって、 $l=\frac{y}{x-2}$ の最小値は $l=-1$ である。また、放物線 $y=x^2-2$ と直線 $y=lx-2l$ が接するとき、2次方程式 $x^2-2=lx-2l \Leftrightarrow x^2-lx+2(l-1)=0$ の判別式の値は0 となるから、

$$\begin{aligned}l^2-8(l-1)&=0 \\ \Leftrightarrow l^2-8l+8&=0 \\ \therefore l&=4\pm 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。 $l=4+2\sqrt{2}$ のとき、

$$\begin{aligned}x^2-lx+2(l-1)&=0 \\ \Leftrightarrow x^2-(4+2\sqrt{2})x+2(3+2\sqrt{2})&=0 \\ \Leftrightarrow (x-2-\sqrt{2})^2&=0 \\ \therefore x&=2+\sqrt{2}, y=4\sqrt{2}+4\end{aligned}$$

となり、 $y \leq 0$ より、不適である。 $l=4-2\sqrt{2}$ のときは、

$$\begin{aligned}x^2-lx+2(l-1)&=0 \\ \Leftrightarrow x^2-(4-2\sqrt{2})x+2(3-2\sqrt{2})&=0 \\ \Leftrightarrow (x-2+\sqrt{2})^2&=0 \\ \therefore x&=2-\sqrt{2}, y=-4\sqrt{2}+4\end{aligned}$$

となり、確かに放物線 $y=x^2-2$ と直線 $y=lx-2l$ は $y \leq 0$ で接する。したがって、

$l=\frac{y}{x-2}$ の最大値は、 $l=4-2\sqrt{2}$ であり、このとき、 $(x, y)=(2-\sqrt{2}, -4\sqrt{2}+4)$ となる。

(2)

時刻 $n+1$ に部屋 A にいるとき、時刻 n にも部屋 A にいた場合と、時刻 n に部屋 B にいてその後移動した場合が考えられるから、

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{9}{10}a_n+\frac{1}{15}b_n \\ \Leftrightarrow a_{n+1}&=\frac{9}{10}a_n+\frac{1}{15}(1-a_n) (\because a_n+b_n=1) \\ \Leftrightarrow a_{n+1}&=\frac{5}{6}a_n+\frac{1}{15}\end{aligned}$$

である。 $a_{n+1}=\frac{5}{6}a_n+\frac{1}{15} \Leftrightarrow a_{n+1}-\frac{2}{5}=\frac{5}{6}\left(a_n-\frac{2}{5}\right)$ より、数列 $\left\{a_n-\frac{2}{5}\right\}$ は初項 $a_0-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ 、公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列であるから、

$$a_n-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

である。したがって、 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n=\frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{2}{5}$ となる。このとき、

$$\begin{aligned}a_n&<b_n \\ \Leftrightarrow a_n&<1-a_n \\ \Leftrightarrow a_n&<\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{2}{5}&<\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n&<\frac{1}{6}\end{aligned}$$

となる。ここで、両辺正より、常用対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{5}{6}\right)^n&<\log_{10}\frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow n\log_{10}\frac{5}{6}&<\log_{10}\frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow n>\frac{\log_{10}\frac{1}{6}}{\log_{10}\frac{5}{6}} & \left(\because \log_{10}\frac{5}{6}<0\right) \\ \Leftrightarrow n>\frac{-\log_{10}2-\log_{10}3}{\log_{10}5-\log_{10}2-\log_{10}3} \\ \Leftrightarrow n>\frac{-0.30-0.48}{0.70-0.30-0.48} \\ \therefore n>\frac{0.78}{0.08}&=9.75\end{aligned}$$

である。これを満たす最小の自然数 n は、 $n=10$ である。

[3]

(1)

$f'(x) = x^2 - 1$ より、 $x = \pm 1$ のとき $f'(x) = 0$ となるから $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって、極大値は

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1) + \frac{1}{3}a^3 - a = \frac{1}{3}a^3 - a + \frac{2}{3}$$

であり、極小値は

$$f(1) = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}a^3 - a = \frac{1}{3}a^3 - a - \frac{2}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \text{ 極大値 } \frac{1}{3}a^3 - a + \frac{2}{3}, \text{ 極小値 } \frac{1}{3}a^3 - a - \frac{2}{3}$$

(2)

曲線 C の式は $y = f(x-a)$ と表せるから、曲線 $y = f(x)$ との共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-a) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{3}a^3 - a &= \frac{1}{3}(x-a)^3 - (x-a) + \frac{1}{3}a^3 - a \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x &= \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x - \frac{1}{3}a^3 - x + a \\ \Leftrightarrow ax^2 - a^2x + \frac{1}{3}a^3 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - ax + \frac{1}{3}a^2 - 1 &= 0 \quad (\because a > 0) \\ \therefore x &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\left(\frac{1}{3}a^2 - 1\right)}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{-\frac{1}{3}a^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

である。 $0 < a < 3$ より、 $-\frac{1}{3}a^2 + 4 > 0$ は常に成り立つから、 $y = f(x)$ と C の共有点の x 座標

$$\text{は } x = \frac{a \pm \sqrt{-\frac{1}{3}a^2 + 4}}{2} \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) \quad x = \frac{a \pm \sqrt{-\frac{1}{3}a^2 + 4}}{2}$$

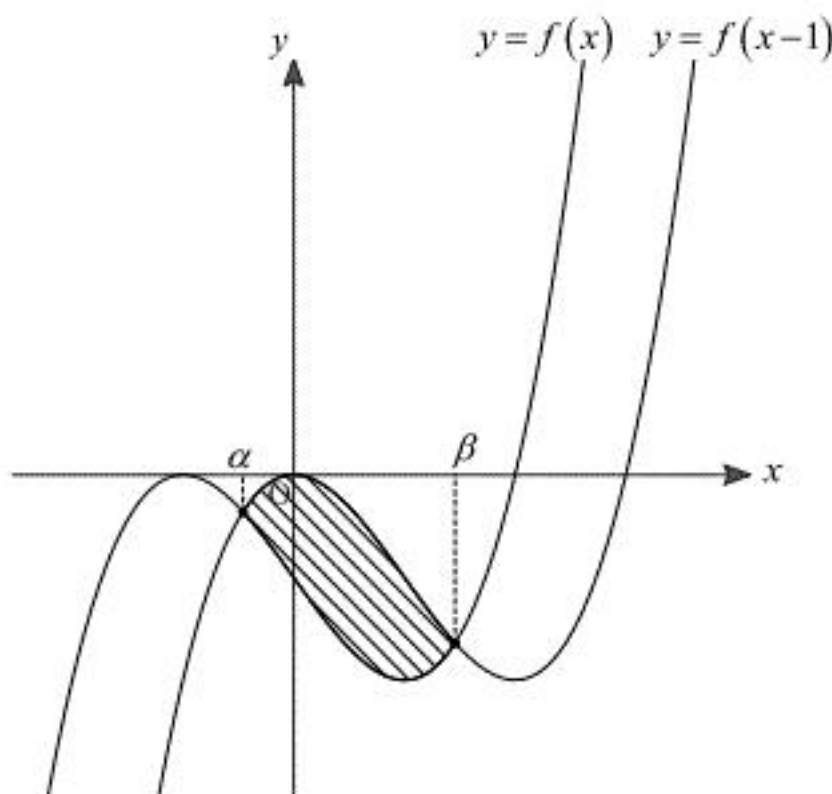
(3)

$a = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - x - \frac{2}{3} \\ f(x-1) &= \frac{1}{3}(x-1)^3 - (x-1) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}x^3 - x^2 \end{aligned}$$

である。また、 $y = f(x)$ と $y = f(x-1)$ の共有点の x 座標は(2)より $x = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}}{2}$ である。ここ

で、 $\alpha = \frac{1 - \sqrt{\frac{11}{3}}}{2}$ 、 $\beta = \frac{1 + \sqrt{\frac{11}{3}}}{2}$ とおくと、 $\beta - \alpha = \sqrt{\frac{11}{3}}$ である。求める面積は下図の斜線部分のようになる。



したがって、

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x-1) - f(x)\} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \left(\frac{1}{3}x^3 - x - \frac{2}{3} \right) \right\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} \left(x^2 - x - \frac{2}{3} \right) dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} \\ &= \frac{\left(\sqrt{\frac{11}{3}} \right)^3}{6} \\ &= \frac{11\sqrt{33}}{54} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{11\sqrt{33}}{54}$$