

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	120	$3\sqrt{7}$	$\frac{45\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{14}$	$\frac{15\sqrt{3}}{14}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{63}$

【解説】

(1)

$\angle ABC = \theta (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ とおくと、円に内接する四角形の向かい合う内角の和は 180° であるから、

$$\angle ADC = 180^\circ - \theta$$

とおける。 $\triangle ABC$ に対して余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos \theta \\ \Leftrightarrow AC^2 &= 45 - 36 \cos \theta \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。次に、 $\triangle ACD$ に対して余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 3^2 + 9^2 - 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot \cos (180^\circ - \theta) \\ \Leftrightarrow AC^2 &= 90 + 54 \cos \theta \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。したがって、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} 45 - 36 \cos \theta &= 90 + 54 \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であり、 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ であることに注意すれば、 $\angle ABC = 120^\circ$ と求まる。これを $\textcircled{1}$ に代入して、 $AC > 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 45 - 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 63 \\ \therefore AC &= 3\sqrt{7} \end{aligned}$$

となる。四角形 $ABCD$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{45\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

と求まる。続いて、 $\angle BAD = \alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ とおくと、先程と同様の議論により

$$\angle BCD = 180^\circ - \alpha$$

であり、 $S = \triangle ABD + \triangle BCD$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \sin (180^\circ - \alpha) \\ \Leftrightarrow \frac{45\sqrt{3}}{4} &= \frac{63}{2} \sin \alpha \\ \therefore \sin \alpha &= \frac{5\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

となる。DH については $\triangle ADH$ が $\angle AHD = 90^\circ$ 、 $\angle HAD = 180^\circ - \alpha$ を満たす直角三角形であることに着目すれば、

$$\begin{aligned} DH &= AD \sin \angle HAD \\ &= AD \sin (180^\circ - \alpha) \\ &= AD \sin \alpha \\ &= 3 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

カードの取り出し方はどれも同様に確からしい。取り出したカードは袋に戻さないことに注意すると、 $X_2 = 4$ となるとき、 X_1 として考えられるのは 4 以外の 8 通りである。 (X_3, X_4) は (X_1, X_2) で選んだ数字以外であれば、どの数字を選んでもよいから、確率には影響しない。よって、 (X_1, X_2) の選び方の総数は ${}_9P_2$ 通りであるから、 $X_2 = 4$ となる確率は、

$$\frac{8 \cdot 1}{9 \cdot 8} = \frac{1}{9}$$

となる。また、 $X_1 + X_2 \leq 7$ を満たす (X_1, X_2) の組をすべて挙げると、

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1)$ の 18 通りであるから、 $X_1 + X_2 \leq 7$ となる確率は、

$$\frac{18}{9 \cdot 8} = \frac{1}{4}$$

である。 $X_4 = 2X_1$ を満たす (X_1, X_4) の組をすべて挙げると、 $(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)$ の 4 通りであるから、 $X_4 = 2X_1$ となる確率は、

$$\frac{1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot 4 = \frac{1}{18}$$

となる。続いて、 $Y_2 = 4$ となる確率と $Y_4 = 2Y_1$ となる確率についてそれぞれ考える。

(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) は大小関係が定まっているから、1 から 9 までの数の中から 4 つを選べば、自動的に (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) は一意に定まる。選んだ 4 個の数の順序は関係がなくなるため、 (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) の選び方の総数は ${}_9C_4$ 通りである。このうち、 $Y_2 = 4$ となるのは、 $Y_1 = 1, 2, 3$ で $5 \leq Y_3 < Y_4 \leq 9$ のときだから、 $Y_2 = 4$ となる確率は、

$$\frac{3 \cdot {}_5C_2}{{}_9C_4} = \frac{3 \cdot 10}{3 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{21}$$

となる。 $Y_4 = 2Y_1$ となる組については、 Y_1 と Y_4 の間に相異なる 2 つの数 Y_2, Y_3 が存在するから、 $Y_4 - Y_1 \geq 3$ が必要であることに注意すると、 $Y_4 = 2Y_1$ となる (Y_1, Y_4) の組は $(3, 6), (4, 8)$ に限られる。 $(Y_1, Y_4) = (3, 6)$ のときは、 $(Y_2, Y_3) = (4, 5)$ の 1 通りであり、 $(Y_1, Y_4) = (4, 8)$ のときは、 $(Y_2, Y_3) = (5, 6), (5, 7), (6, 7)$ の 3 通りであるから、 $Y_4 = 2Y_1$ となる確率は、

$$\frac{1+3}{{}_9C_4} = \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{2}{63}$$

である。

【2】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$\frac{1}{2}$	$16x^3-12x+4$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	$\left(6, \frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, 5\right)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

【解説】

(1)

真数条件より、関数①が定義されうる範囲は、 $1-2x>0$ かつ $x+1>0$ 、すなわち $-1<x<\frac{1}{2}$ である。関数①は底を4に揃えると、

$$\begin{aligned} y &= 1 + \log_2(1-2x) - \log_{\frac{1}{4}}(x+1) \\ &= \log_4 4 + \frac{\log_4(1-2x)}{\log_4 2} - \frac{\log_4(x+1)}{\log_4 \frac{1}{4}} \\ &= \log_4 4 + \log_4(1-2x)^2 + \log_4(x+1) \\ &= \log_4 \left\{ 4(1-2x)^2(x+1) \right\} \\ &= \log_4(16x^3-12x+4) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(x)=16x^3-12x+4$ とおく。両辺を x について微分すると、

$$f'(x)=48x^2-12=12(2x+1)(2x-1)$$

となるから、増減表は下表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって、 $f(x)$ は $x=-\frac{1}{2}$ で最大となるから、関数①もこのときに最大となり、その値は

$$\log_4 \left\{ 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \right\} = \log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$$

である。また、 $y=1$ となると、 $f(x)=4$ である。これを解くと、

$$\begin{aligned} 16x^3-12x+4 &= 4 \\ \Leftrightarrow 16x^3-12x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(4x^2-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、関数①の定義されうる範囲が $-1<x<\frac{1}{2}$ であることに注意すると、 $y=1$ と

なる x の値は $x=0, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ であると求まる。

(2)

与えられた連立漸化式において、 $n=1$ とすれば、

$$\begin{cases} 3=p-3 \\ 4=3+2q \end{cases}$$

となるため、 $p=6, q=\frac{1}{2}$ を得る。これより、与えられた連立漸化式は、

$$\begin{cases} a_{n+1}=6a_n-\frac{3}{2}b_n \\ b_{n+1}=3a_n+\frac{1}{2}b_n \\ a_1=1 \\ b_1=2 \end{cases}$$

と書き直される。 $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ に上の式を代入すれば、

$$\begin{aligned} \left(6a_n-\frac{3}{2}b_n\right)+\alpha\left(3a_n+\frac{1}{2}b_n\right) &= \beta(a_n+\alpha b_n) \\ \Leftrightarrow (6+3\alpha-\beta)a_n+\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\alpha-\alpha\beta\right)b_n &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。①が n についての恒等式となると、 a_n, b_n の係数は0となるため、

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6+3\alpha-\beta=0 \\ -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\alpha-\alpha\beta=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=3\alpha+6 \\ -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\alpha-\alpha(3\alpha+6)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=3\alpha+6 \\ 6\alpha^2+11\alpha+3=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=3\alpha+6 \\ (3\alpha+1)(2\alpha+3)=0 \end{cases} \end{aligned}$$

が得られ、 $\alpha_1<\alpha_2$ であることから、 $(\alpha_1, \beta_1)=\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), (\alpha_2, \beta_2)=\left(-\frac{1}{3}, 5\right)$ と求まる。この結果から、与えられた連立漸化式を、

$$\begin{cases} a_{n+1}-\frac{3}{2}b_{n+1}=\frac{3}{2}\left(a_n-\frac{3}{2}b_n\right) \\ a_{n+1}-\frac{1}{3}b_{n+1}=5\left(a_n-\frac{1}{3}b_n\right) \\ a_1=1 \\ b_1=2 \end{cases}$$

と等比数列の形の2本の漸化式に書き換えることができる。以上より、

$$\begin{cases} a_n-\frac{3}{2}b_n=\left(a_1-\frac{3}{2}b_1\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ a_n-\frac{1}{3}b_n=\left(a_1-\frac{1}{3}b_1\right)\cdot 5^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot 5^{n-1} \end{cases}$$

を得る。ここから b_n を消去すれば、

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{7}\left\{2\left(a_n-\frac{3}{2}b_n\right)-9\left(a_n-\frac{1}{3}b_n\right)\right\} \\ &= \frac{4}{7}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\frac{3}{7}\cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

と求まる。

【3】

(1)

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ がただ一つの共有点を持つことから、

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}x^2-4ax-b &= 0 \end{aligned}$$

は重解を持つ。 $\frac{4}{3}x^2-4ax-b=0$ の判別式を D_1 とすると、

$$\frac{D_1}{4}=(-2a)^2+\frac{4}{3}b=\frac{4}{3}(3a^2+b)$$

であり、重解を持つとき $D_1=0$ であることから、 $b=-3a^2$ を得る。これより、

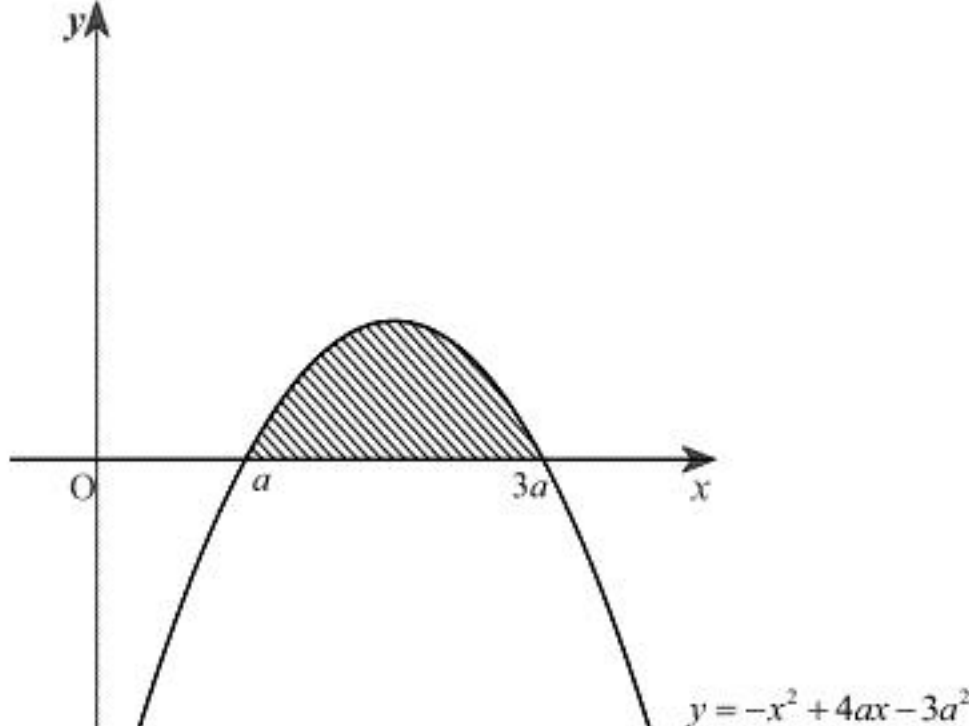
$$f(x)-g(x)=\frac{4}{3}x^2-4ax+3a^2=\frac{1}{3}(2x-3a)^2$$

となり、共有点Pの座標は $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{4}a^2\right)$ と求まる。

$$(\text{答}) \quad b=-3a^2, \text{P}\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{4}a^2\right)$$

(2)

$y=g(x)$ と x 軸で囲まれた図形は下図の斜線部のようになる。



$y=g(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S とする。(1)より、 $b=-3a^2$ であるから、

$$g(x)=-x^2+4ax-3a^2=-(x-a)(x-3a)$$

となり、曲線 $y=g(x)$ は x 軸と $(a, 0), (3a, 0)$ で交わるような上に凸の放物線であると分かる。したがって、

$$\begin{aligned} S &= -\int_a^{3a} (x-a)(x-3a) dx \\ &= \frac{1}{6}(3a-a)^3 \\ &= \frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$

である。

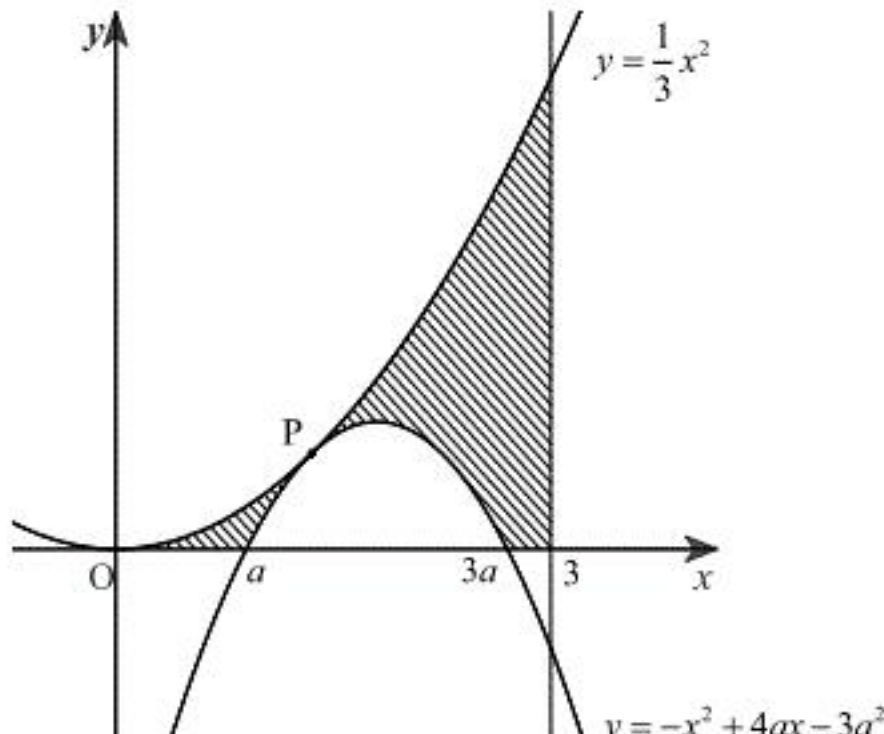
$$(\text{答}) \quad \frac{4}{3}a^3$$

(3)

領域 D の面積を $S(a)$ とする。 a の値に応じて、領域 D の形状は変化するため、次のように場合分けを行う。

[1] $0 < 3a \leq 3$, すなわち $0 < a \leq 1$ のとき

このとき、領域 D は下図の斜線部のようになる。



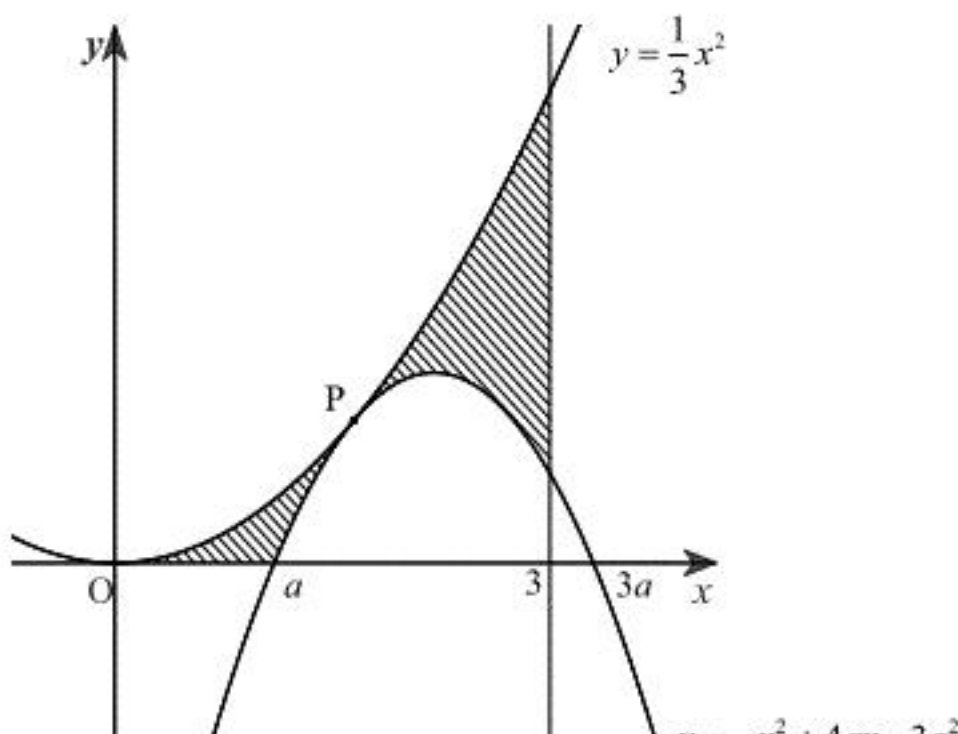
上図より、求める面積 $S(a)$ は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^3 \frac{1}{3}x^2 dx - S \\ &= \left[\frac{1}{9}x^3 \right]_0^3 - \frac{4}{3}a^3 \\ &= 3 - \frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$

となる。

[2] $a \leq 3 < 3a$, すなわち $1 < a \leq 3$ のとき

このとき、領域 D は下図の斜線部のようになる。



上図より、求める面積 $S(a)$ は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^3 \frac{1}{3}x^2 dx - \int_a^3 g(x) dx \\ &= 3 - \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2ax^2 - 3a^2x \right]_a^3 \\ &= 3 - \left\{ (-9 + 18a - 9a^2) - \left(-\frac{1}{3}a^3 + 2a^3 - 3a^3 \right) \right\} \\ &= 3 - \left(\frac{4}{3}a^3 - 9a^2 + 18a - 9 \right) \\ &= -\frac{4}{3}a^3 + 9a^2 - 18a + 12 \end{aligned}$$

となる。

以上[1],[2]より、 $0 < a \leq 1$ のとき $S(a) = 3 - \frac{4}{3}a^3$, $1 < a \leq 3$ のとき

$S(a) = -\frac{4}{3}a^3 + 9a^2 - 18a + 12$ となる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = \begin{cases} 3 - \frac{4}{3}a^3 & (0 < a \leq 1 \text{ のとき}) \\ -\frac{4}{3}a^3 + 9a^2 - 18a + 12 & (1 < a \leq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(4)

$0 < a \leq 1$ において $S(a)$ は単調減少関数であるから、 $0 < a \leq 1$ の範囲における $S(a)$ の最小値

は $S(1) = \frac{5}{3}$ である。 $1 < a \leq 3$ において、

$$S'(a) = -4a^2 + 18a - 18 = -2(a-3)(2a-3)$$

となるから、増減表は下表のようになる。

a	1	...	$\frac{3}{2}$	...	3
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	3

以上より、 $0 < a \leq 3$ の範囲において、 $S(a)$ は $a = \frac{3}{2}$ のとき最小値 $S\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } \frac{3}{4} \quad (a = \frac{3}{2} \text{ のとき})$$